

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВОДНЫХ КОММУНИКАЦИЙ

---

**Д. П. Голоскоков**

**ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

*Учебное пособие*

Санкт-Петербург

2011

УДК 517.958:52/59

ББК 22.311

Г61

Р е ц е н з е н т :

д.т.н., профессор А. П. Нырков (СПГУВК)

Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
Санкт-Петербургского государственного университета  
водных коммуникаций.

**Голоскоков Д. П.**

Г61

Обобщённые функции в задачах математической физики:  
учебное пособие. – СПб.: СПГУВК, 2011. – 131 с.

Настоящее пособие состоит из трех частей. В первой даны элементарное введение в теорию обобщенных функций и их приложения. Изложены следующие специальные разделы математики: импульсные функции и их приложения в физике; приведено понятие о частично-вырожденных уравнениях и методах их решения. Во второй части подробно рассматривается метод решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с особенностями импульсного типа в правой части. Третья часть посвящена приложениям обобщенных функций в механике. Здесь рассматриваются задачи из сопротивления материалов, теории изгиба тонких пластин, как гладких, так и подкрепленных ребрами жесткости.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 010501.65 «Прикладная математика и информатика», а также может быть полезно аспирантам, инженерам и научным сотрудникам технических факультетов университетов.

УДК 517.958:52/59

ББК 22.311

© Голоскоков Д. П., 2011

© СПГУВК, 2011

## Введение

### ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА?\*

*Математическая физика* – это теория математических моделей физических явлений. Она относится к математическим наукам; критерий истины в ней – математическое доказательство. Однако, в отличие от «чисто» математических наук, в математической физике исследуются физические задачи на математическом уровне, а результаты представляются в виде теорем, графиков, таблиц и т. д., которые получают физическую интерпретацию. При таком широком понимании математической физики к ней следует относить и такие разделы механики как теоретическая механика, гидродинамика и теория упругости.

Первоначально математическая физика сводилась к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Это направление составляет предмет *классической математической физики*, которая сохраняет большое значение и в настоящее время.

Классическая математическая физика развивалась со времен Ньютона параллельно с развитием физики и математики. В конце XVII в. было открыто дифференциальное и интегральное исчисление (И. Ньютон, Г. Лейбниц), сформулированы основные законы классической механики и закон всемирного тяготения (И. Ньютон). В XVIII в. методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн, стержней, маятников, а также задач, связанных с акустикой и гидродинамикой; закладываются основы аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, К. Гаусс, П. Лаплас). В XIX в. методы математической физики полу-

---

\* Владимирова В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

чили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, теории упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами и т. д.; создаются теория потенциала, теория устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, Л. Больцман, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Дж. К. Максвелл, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, Г. Р. Кирхгоф, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт, Ж. Адамар). В XX в. и начале XXI в. возникают новые задачи газовой динамики, теории переноса частиц и физики плазмы.

Среди многочисленных задач классической математической физики рассматриваются следующие три типа простейших дифференциальных уравнений — уравнений математической физики.

- *уравнение Пуассона* (при  $f = 0$  — *уравнение Лапласа*)

$$-\Delta u = f, \quad u = u(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset R^n, \quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ;

- *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad u = u(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset R^n, \quad t > 0; \quad (2)$$

- *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f, \quad u = u(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset R^n, \quad t > 0. \quad (3)$$

В уравнениях (2) и (3)  $t$  обозначает время. Уравнения (2) и (3), не зависящие от времени  $t$ , называются *стационарными*. Они сводятся к уравнению Пуассона (1). Дифференциальные уравнения дополняются соответствующими *краевыми условиями*. Примерами краевых условий могут быть следующие:

для уравнения (1) – *граничные условия*

$$u|_{x \in S} = U(x) \text{ или } \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x \in S} = U_1(x), \quad (4)$$

где  $S$  – граница области  $G$  и  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $S$ , определяют *задачу Дирихле* или *задачу Неймана* соответственно;

для уравнения (2) – *начальное условие*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^n, \quad (5)$$

определяет *задачу Коши*;

для уравнения (3) – *начальные условия*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in R^n, \quad (6)$$

определяют *задачу Коши*.

Для уравнений (2) и (3) ставятся также *смешанные задачи*, которые содержат как граничные условия типа (4), так и начальные условия (5) или (6). Начальные и граничные условия составляют *краевые условия*.

С развитием квантовой механики и ядерной энергетики появились новые типы уравнений и краевых задач математической физики. Например,

- *уравнение Шрёдингера* для волновой функции  $\psi(x, t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi,$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка. Ставится задача Коши. Для

стационарного уравнения Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi = 0$$

граничным условием может быть такое:

$$\psi \in L_2(R^3),$$

отражающее поведение решения на бесконечности;

- для уравнения Гельмгольца

$$\Delta \psi + k^2 \psi = -f(x)$$

ставятся граничные условия на бесконечности вида

$$\psi(x) = e^{ik(a,x)} + v(x), \quad |a| = 1, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где функция  $v(x)$  удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Здесь  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  — евклидова длина вектора  $x$ ,

$(a, x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$  — скалярное произведение векторов  $x$  и  $a$ ,

$a = (a_1, a_2, a_3)$ .

Основными математическими средствами исследования задач классической математической физики служат теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория функций и функциональный анализ, вариационное исчисление, теория вероятностей, приближенные методы и вычислительная математика.

Среди задач математической физики выделяется важный класс корректно поставленных задач по Адамару, т. е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования на первый взгляд кажутся совершенно естественными, их, тем не менее, необходимо доказывать в рамках принятой математической модели. Доказательство корректности — это первая апробация математической модели: модель непротиворечива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно), модель малочувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи). Например, перечисленные выше краевые задачи корректно поставлены.

В XX в. появляются новые разделы физики: квантовая механика, квантовая теория поля, квантовая статистическая физика, теория относительности, гравитация (А. Пуанкаре, Д. Гильберт, П. А.-М. Дирак, А. Эйнштейн, Н. Н. Боголюбов, В. А. Фок, Э. Шрёдингер, Г. Вейль, Р. Фейнман, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг). Для их изучения множество используемых математических средств значительно расширяется: наряду с традиционными областями математики стали широко применяться теория операторов, теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных, топологические и алгебраические методы, теория чисел,  $p$ -адический анализ, асимптотические и вычислительные методы. С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ, и появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты, например моделировать взрыв атомной бомбы или работу атомного реактора в реальном масштабе времени. В этом интенсивном взаимодействии современной теоретической физики и современной математики оформилась новая область – *современная математическая физика*. Ее модели не всегда сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений, они часто формулируются в виде системы аксиом. Термин «современная математическая физика» был введен в 1981 г. академиком Н. Н. Боголюбовым.

В исследовании задач математической физики важную роль играют обобщенные функции и тесно связанная с ними концепция обобщенного решения. В той или иной форме обобщенные решения и  $\delta$ -функция вводились ещё в XIX в. Г. Р. Кирхгофом, Дж. Максвеллом и О. Хевисайдом. В 20–30-е годы XX в. понятие обобщенной производной (типа функции) и обобщенного решения дифференциальных уравнений встречается в той или иной форме в работах математиков (Д. Эванс, Л. Тонелли, Ч. Мори, К. О. Фридрихс, Ж. Лере). Но еще раньше Л. Эйлер в фундаментальном труде «Integralrechnung» (1830 г.) явно говорит об обобщенном решении. Получив

общее решение волнового уравнения, описывающего малые поперечные колебания однородной струны,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

в виде

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at),$$

он пишет, что вместо введённых непрерывных функций  $f$  и  $g$  можно взять любые функции, вовсе лишённые свойства непрерывности. Заметим, что во времена Эйлера под непрерывными функциями понимались аналитические функции.

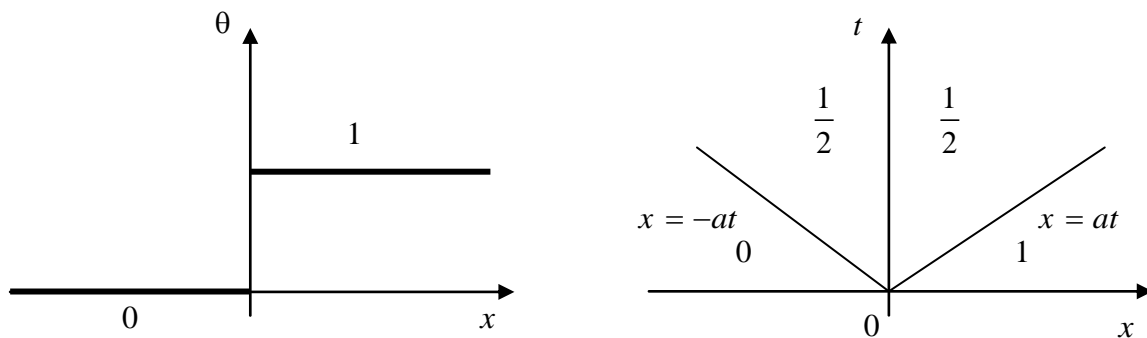


Рис. 1

Таким образом, следуя Эйлеру, мы должны считать разрывную функцию

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\theta(x - at) + \theta(x + at)],$$

описывающую распад разрыва (рис. 1), обобщенным решением задачи Коши для уравнения (7) с начальными условиями

$$u(x, 0) = \theta(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x \in R,$$

где  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  — функция Хэвисайда



В конце 1920-х годов П. А.-М. Дирак в своих квантово-механических исследованиях ввел в науку математически корректное определение  $\delta$ -функции (теперь носящей его имя) как линейного функционала, сопоставляющего каждой непрерывной функции  $\varphi(x)$  ее значение в нуле,  $\varphi(0)$ , что символически записывается так:

$$\delta(x) = 0, x \neq 0, \int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \equiv (\delta, \varphi). \quad (8)$$

На рис. 2 изображена «формальная»  $\delta$ -функция, а на рис. 3 – «приближённая»  $\delta_\varepsilon(x)$ -функция,  $\varepsilon \rightarrow 0, \int \delta_\varepsilon(x)dx = 1$ .

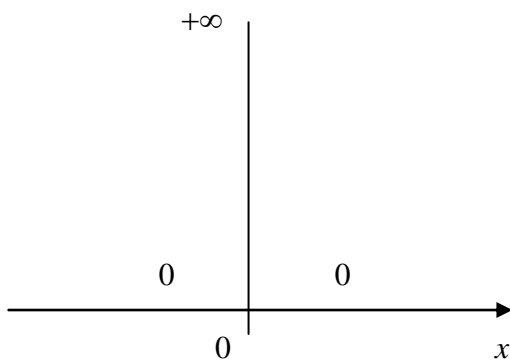


Рис. 2

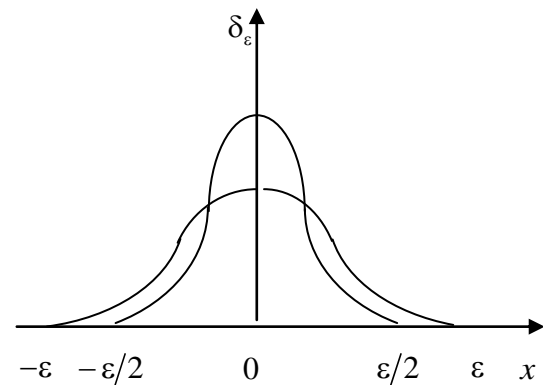


Рис. 3

Таким образом, в соответствии с равенством (8) справедливо соотношение

$$\int \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi), \varepsilon \rightarrow +0.$$

которое означает, что последовательность «приближённых»  $\delta$ -функций  $\delta_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ , слабо сходится к  $\delta$ -функции Дирака, в то время как поточечно она сходится к «формальной»  $\delta$ -функции, т. е. к нулевой (см. рис. 2).

Потребовались усилия многих математиков (Ж. Адамар, С. Бохнер, М. Рисс, С. Л. Соболев, Л. Шварц), чтобы прийти к корректному определению обобщенной функции и ее производных. Основы математической теории обобщенных функций заложил С. Л. Соболев (1936 г.) и успешно приме-

нил к решению обобщенной задачи Коши для гиперболических уравнений. В послевоенные годы Л. Шварц, опираясь на предварительно созданную теорию векторных локально выпуклых топологических пространств, предпринял систематическое построение теории обобщенных функций и указал ряд важных ее приложений. Он изложил её в своей известной монографии «*Theorie des distributions*» (1950/51 год). В дальнейшем теория обобщенных функций находит все более широкие применения в математической физике, что стимулировало ее интенсивное развитие. В настоящее время эта теория прочно вошла в обиход математика, физика и инженера.

Обобщенные функции обладают рядом замечательных свойств, расширяющих возможности классического математического анализа, например: любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой (в обобщенном смысле), сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз, преобразование Фурье обобщенной функции всегда существует и т. д. Поэтому использование техники обобщенных функций существенно расширяет круг рассматриваемых задач и к тому же приводит к значительным упрощениям, автоматизируя элементарные операции.

# Глава 1.

## ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

При математическом описании физических явлений важную роль играет понятие функции. В разных случаях это понятие приходится рассматривать с различной степенью общности. В некоторых случаях можно ограничиться непрерывными функциями, в других бывает необходимо потребовать дифференцируемость функций, т. е. существование либо производной во всех точках, либо даже не только первой производной, но и производных более высокого порядка.

При решении различных прикладных задач механики, физики, техники приходится сталкиваться с функциями, аналитическое описание которых невозможно в рамках классического анализа. В механике это нередко связано с тем, что расчетные схемы различных механических систем содержат сосредоточенные включения в распределенные параметры. Приведем простейшие примеры.

- Распределение непрерывной нагрузки вдоль стержня обычно определяется ее интенсивностью, которая задается как непрерывная функция координаты. Но если на стержень действуют сосредоточенные силы, то интенсивность нагрузки не может быть выражена функцией, удовлетворяющей классическому определению, или, как говорят, не может быть выражена обычной функцией.
- Если масса стержня непрерывно распределяется вдоль его оси, то это распределение задается плотностью, которая будет непрерывной функцией координаты. Но если на оси стержня имеются отдельные точки, в

которых сосредоточены конечные массы, то плотность такого распределения массы не может быть выражена обычной функцией.

- В ряде случаев при решении задач об ударе считают, что импульс ударной силы действует мгновенно. В этих случаях также не существует обычных функций, выражающих зависимость силы от времени.

Для математического описания интенсивности нагрузки, распределения масс, ударных сил при таких идеализациях как сосредоточенная сила, конечная масса, сосредоточенная в точке, мгновенно действующий импульс необходимо значительно расширить понятие функции. В современном функциональном анализе с этой целью вводятся в рассмотрение обобщенные функции или распределения (distributions). Термин «распределение» применяется в иностранной литературе. В отечественной литературе употребляется термин «обобщенная функция».

Необходимость расширения понятия функции и введения в анализ обобщенных функций обуславливается еще и следующим обстоятельством. Как известно, в классическом анализе многие функции не имеют производных в отдельных точках или даже повсюду, так что операция дифференцирования оказывается не всегда выполнимой. Конечно, можно было бы ограничиться рассмотрением только аналитических функций, но, как видно из приведенных примеров, такое сужение запаса функций вряд ли допустимо. Обобщенные же функции, как оказывается, имеют производные любого порядка (естественно, производные обобщенных функций будут также обобщенными функциями). Таким образом, получается математический аппарат, достаточно удобный для решения физических и технических задач.

В приведенных выше примерах для математического описания физических величин (интенсивности нагрузки, плотности массы, ударной силы) при указанных идеализациях (сосредоточенные силы, сосредоточенные массы,

мгновенно действующий импульс) нужно воспользоваться  $\delta$ -функцией Дирака, которая уже давно успешно применяется физиками.

Дельта-функцию обычно связывают с именем П. А.-М. Дирака, который ввел ее в квантовую механику в 1926 г. Теория обобщенных функций, как уже отмечалось во Введении, создана работами русского математика С. Л. Соболева и француза Л. Шварца. В настоящее время по обобщенным функциям имеется обширная литература. С точки зрения современного функционального анализа, дельта-функция является простейшей сингулярной обобщенной функцией. Приведем краткую сводку основных результатов теории обобщенных функций, стараясь ограничиться минимумом чисто математических определений [1].

## 1. Игообразные функции

При рассмотрении многих вопросов естествознания приходится иметь дело с функциями, равными нулю вне некоторых интервалов малой длины, но интегралы от которых по интервалам, где эти функции отличны от нуля, имеют сравнительно большую величину.

Для нас особый интерес представляют функции, называемые *иглообразными*.

**Определение 1.** Непрерывная или кусочно-непрерывная функция  $\delta(x, \lambda)$  аргумента  $x$ , зависящая от параметра  $\lambda$ , называется *иглообразной*, если:

1)  $\delta(x, \lambda) = 0$  при  $|x| > \lambda$ ;

2)  $\delta(x, \lambda) \geq 0$  при  $|x| < \lambda$ ;

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, \lambda) dx = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \delta(x, \lambda) dx = 1.$$

Условие 3) означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком иглообразной функции, а снизу – осью  $Ox$ , всегда равна единице (рис. I.1.1). Приведем несколько примеров таких функций.

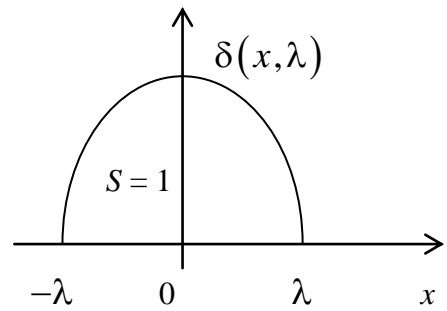


Рис. I.1.1

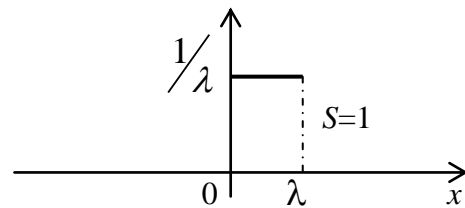
1. Кусочно-непрерывная функция (рис. I.1.2):

$$\delta(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > \lambda; \\ \frac{1}{\lambda}, & 0 < x < \lambda; \end{cases} \quad \text{— правосторонний «прямоугольный импульс»},$$

площадь криволинейной трапеции  $S = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda = 1$ ; или

$$\delta(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & |x| > \lambda; \\ \frac{1}{2\lambda}, & |x| < \lambda; \end{cases} \quad \text{— симметричный «прямоугольный импульс»},$$

площадь криволинейной трапеции  $S = \frac{1}{2\lambda} \cdot 2\lambda = 1$ .



а)

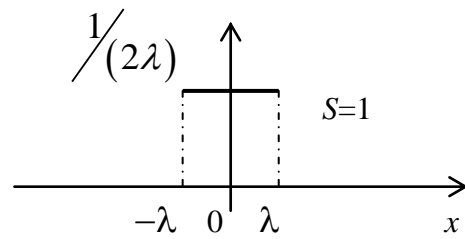


Рис. I.1.2.

2. Непрерывная функция (рис. I.1.3):

$$\delta(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & |x| > \lambda; \\ \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{|x|}{\lambda} \right), & |x| < \lambda; \end{cases} \quad \text{—}$$

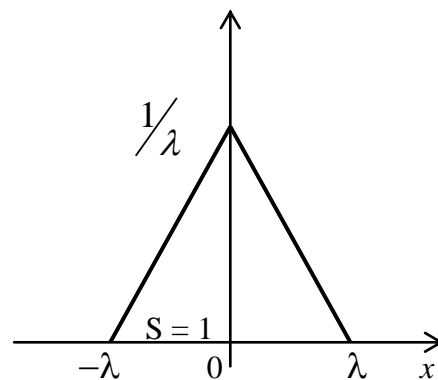


Рис. I.1.3.

«треугольный импульс», площадь криволинейной трапеции

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1.$$

3. Гладкая функция (рис. I.1.4):

$$\delta(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & |x| > \lambda; \\ \frac{1}{\lambda} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2\lambda}\right), & |x| < \lambda. \end{cases}$$

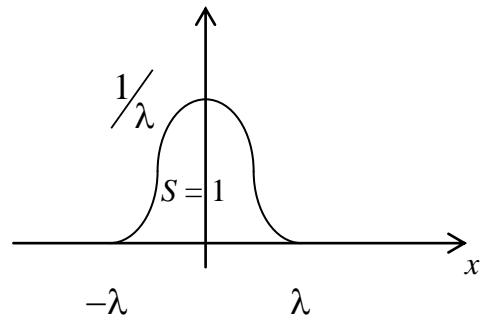


Рис. I.1.4.

Для последней функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, \lambda) dx = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{\lambda} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2\lambda}\right) dx = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right)\right] dx = 1.$$

Можно привести и много других примеров.

## 2. Поведение иглообразных функций при $\lambda \rightarrow 0$

Из рассмотренных примеров видно, что формы пика и другие особенности графиков иглообразных функций весьма разнообразны. Однако не эти особенности являются главными; имеют значение лишь общие свойства иглообразных функций, указанные в определении.

Зафиксируем какое-нибудь значение  $x \neq 0$ . Так как, с одной стороны, при неограниченном уменьшении  $\lambda$  основание пика  $(-\lambda, \lambda)$  стремится к нулю, а при всех  $|x| > \lambda$ , по определению иглообразных функций,  $\delta(x, \lambda) = 0$ , то, очевидно, что для  $x \neq 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta(x, \lambda) = 0.$$

С другой стороны, при  $\lambda \rightarrow 0$  средняя высота пика на интервале  $(-\lambda, \lambda)$  неограниченно возрастает, т.е.

$$\frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \delta(x, \lambda) dx = \frac{1}{2\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \infty,$$

при обязательном выполнении условия

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \delta(x, \lambda) dx = 1.$$

### 3. Дельта-функция Дирака

Пусть  $f(x)$  – функция, непрерывная на интервале  $(a, b)$ , а  $\delta(x, \lambda)$  – иглообразная функция. Рассмотрим поведение интеграла

$$\int_a^b f(x) \delta(x, \lambda) dx$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Пусть сначала интервал  $(a, b)$  содержит внутри себя точку  $x = 0$ , т. е.  $a < x < b$  и  $\lambda \leq \min(|a|, b)$ . Из определения иглообразной функции и обобщенной теоремы о среднем получаем

$$\int_a^b f(x) \delta(x, \lambda) dx = \int_{-\lambda}^{+\lambda} f(x) \delta(x, \lambda) dx = f(\xi) \int_{-\lambda}^{+\lambda} \delta(x, \lambda) dx = f(\xi),$$

где  $\xi \in (-\lambda, \lambda)$ . Если  $\lambda \rightarrow 0$ , то и  $\xi \rightarrow 0$ , а в силу непрерывности функции  $f(x)$  и  $f(\xi) \rightarrow f(0)$ . Поэтому при  $a < x < b$



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \delta(x, \lambda) dx = f(0). \quad (\text{I.3.1})$$

Если же числа  $a$  и  $b$  одинаковых знаков ( $a < b < 0$  или  $0 < a < b$ ), т. е. интервал  $(a, b)$  не содержит внутри себя точку  $x = 0$ , то, как нетрудно заметить,

$$\int_a^b f(x) \delta(x, \lambda) dx = 0$$

при всех достаточно малых  $\lambda$  (рис. I.3.1), а, следовательно, и

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \delta(x, \lambda) dx = 0. \quad (\text{I.3.2})$$

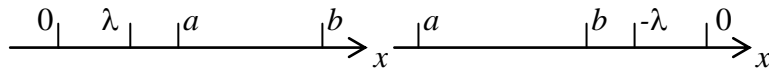


Рис. I.3.1.

Обозначим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \delta(x, \lambda) dx = \int_a^b f(x) \delta(x) dx. \quad (\text{I.3.3})$$

Введенный здесь символ  $\delta(x)$  ( $\delta$ -функция) представляет собой не обычную, а так называемую обобщенную функцию, характеризующую предельное поведение иглообразной функции  $\delta(x, \lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , и используется при вычислении интегралов.

Интеграл

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx$$

следует понимать только в смысле равенства (I.3.2), где сначала вычисляется интеграл

$$\int_a^b f(x) \delta(x, \lambda) dx,$$

а затем осуществляется предельный переход при  $\lambda \rightarrow 0$ .

#### 4. Свойства $\delta$ -функции

1. На практике нет необходимости каждый раз прибегать к соотношению (I.3.3). Дельта-функцию можно применять и формально, пользуясь лишь следующим ее *основным свойством*, вытекающим из равенств (I.3.1)–(I.3.3), для любой непрерывной функции

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0), & 0 \in (a, b); \\ 0, & 0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (\text{I.4.1})$$

Если под выражением

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx$$

понимать предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \delta(x - x_0, \lambda) dx = \int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx,$$

то так же, как и выше, можно показать, что

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (\text{I.4.2})$$

Свойство, описываемое соотношениями (I.4.1) и (I.4.2), обычно называют *фильтрующим свойством*  $\delta$ -функции.

При  $f(x) \equiv 1$  соотношения (I.3.3), (I.4.1), (I.4.2) принимают вид

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b \delta(x, \lambda) dx = \int_a^b \delta(x) dx, \quad (\text{I.4.3})$$

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in (a, b); \\ 0, & 0 \notin (a, b), \end{cases} \quad (\text{I.4.4})$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (\text{I.4.5})$$

Если за интервал  $(a, b)$  взять всю числовую ось, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (\text{I.4.6})$$

Так как

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \delta(x - x_0) dx = 1,$$

в технике  $\delta$ -функцию часто называют *функцией единичного импульса*.

**2.** Свойство четности  $\delta$ -функции, заключающееся в справедливости равенства

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \int_a^b f(x) \delta(-x) dx, \quad (\text{I.4.7})$$

часто сокращенно записывается в виде  $\delta(x) = \delta(-x)$ .

Для доказательства справедливости равенства (I.4.7) в интеграле справа примем  $x = -y$  (замена допустима на основании равенства (I.3.3)). Тогда

$$\int_a^b f(x)\delta(-x)dx = -\int_{-a}^{-b} f(-y)\delta(y)dy = \int_{-b}^{-a} f(-y)\delta(y)dy.$$

Если  $a < 0 < b$ , то  $-b < 0 < -a$ , а поэтому, в силу фильтрующего свойства  $\delta$ -функции, получаем

$$\int_{-b}^{-a} f(-y)\delta(y)dy = f(-y)|_{y=0} = f(0).$$

Но интеграл слева в (I.4.7) также равен  $f(0)$ .

Обобщением равенства (I.4.7) является

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \int_a^b f(x)\delta(x_0-x)dx, \quad (\text{I.4.8})$$

которое сокращенно записывают в виде  $\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$ .

### 3. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{f(0)}{|a|}, \quad a = \text{const} \neq 0. \quad (\text{I.4.9})$$

Действительно, сделаем в интеграле (I.4.9) замену  $ax = y$ ,  $adx = dy$ , тогда при  $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{dy}{a} = \frac{f(0)}{a},$$

при  $a < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)dy = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)dy = \frac{f(0)}{|a|}.$$

Следовательно, равенство (4.9) справедливо при любом  $a \neq 0$ .

Равенство (I.4.9) сокращенно записывают в виде

$$\delta(ax) = \frac{\delta(ax)}{|a|}, \quad a = \text{const} \neq 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(a(x-x_0)) dx = \frac{f(x_0)}{|a|}, \quad a = \text{const} \neq 0.$$

#### 4. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(\varphi(x)) dx = \frac{f(0)}{|\varphi'(0)|}, \quad (\text{I.4.10})$$

если  $\varphi(x)$  – монотонная, дифференцируемая функция, имеющая единственный простой нуль в точке  $x = 0$ , т. е. для нее  $\varphi(0) = 0$ , но  $\varphi'(0) \neq 0$ .

Рассмотрим отдельно два случая.

1). Пусть  $\varphi(x)$  – монотонно возрастающая, дифференцируемая функция, для которой  $\varphi(-\infty) = -\infty$ ,  $\varphi(+\infty) = +\infty$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi'(0) > 0$ . Положим  $\varphi(x) = y$ , тогда  $x = \psi(y)$  — обратная ей монотонно возрастающая функция, для которой  $\psi(0) = 0$ ,  $\varphi'(\psi(y)) dx = dy$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(\varphi(x)) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi(y)) \delta(y) \frac{dy}{\varphi'(\psi(y))} =, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\psi(y))}{\varphi'(\psi(y))} \delta(y) dy = \frac{f(\psi(0))}{\varphi'(\psi(0))} = \frac{f(0)}{\varphi'(0)}. \end{aligned}$$

2). Если  $\varphi(x)$  – монотонно убывающая, дифференцируемая функция, для которой  $\varphi(-\infty) = +\infty$ ,  $\varphi(+\infty) = -\infty$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi'(0) < 0$ , то замена  $\varphi(x) = y$  ( $x = \psi(y)$ ,  $\psi(0) = 0$ ) дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(\varphi(x)) dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\psi(y)) \delta(y) \frac{dy}{\varphi'(\psi(y))} =$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\psi(y))}{\varphi'(\psi(y))} \delta(y) dy = \frac{f(\psi(0))}{|\varphi'(\psi(0))|} = \frac{f(0)}{|\varphi'(0)|}.$$

Таким образом, справедливость равенства (I.4.10) доказана. Сокращенно его записывают так:

$$\delta(\varphi(x)) = \frac{\delta(x)}{|\varphi'(0)|}.$$

В общем случае, если точки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются простыми нулями функции  $\varphi(x)$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(\varphi(x)) dx = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}.$$

**5.** Так как  $\delta(x - x_0) = 0$  при любом  $x \neq x_0$ , то справедливо равенство

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0), \quad x \neq x_0. \quad (\text{I.4.11})$$

### **5. Единичная функция Хэвисайда**

Единичная функция Хэвисайда определяется следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\text{I.5.1})$$

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x > x_0; \\ 0, & x < x_0. \end{cases} \quad (\text{I.5.2})$$

**З а м е ч а н и е.** Значения единичной функции в точке разрыва не определены. Часто применяются и такие единичные функции:

- симметричная единичная функция

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

- асимметричные единичные функции

$$\theta_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad \theta_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Следует иметь в виду, что общепринятой системы обозначений для единичных функций нет.

Единичная функция, как и  $\delta$ -функция, широко применяется в математике и ее приложениях. С ее помощью единым аналитическим выражением могут представляться функции, имеющие конечные разрывы. Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1; \\ 3, & x > 1. \end{cases}$$

Единым аналитическим выражением она запишется так

$$f(x) = x - x\theta(x-1) + 3\theta(x-1) = x + (3-x)\theta(x-1).$$

Между единичной функцией и  $\delta$ -функцией существует тесная связь. Для ее установления рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy.$$

Если  $x < 0$ , то интервал  $(-\infty, x)$  не содержит точки  $y = 0$ , а поэтому на основании соотношения (I.4.4)

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = 0.$$

Если же  $x > 0$ , то точка  $y = 0$  находится внутри интервала  $(-\infty, x)$  и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = 1.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (\text{I.5.3})$$

Сравнивая (I.5.1) и (I.5.3), заключаем, что

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = \theta(x). \quad (\text{I.5.4})$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\int_{-\infty}^x \delta(y - x_0) dy = \theta(x - x_0). \quad (\text{I.5.5})$$

## **6. Дифференцирование кусочно-непрерывных функций**

Единичная функция является простейшим примером разрывной функции. Она имеет производную, равную нулю при любом, отличном от нуля  $x$ ; в точке же  $x = 0$ , где  $\theta(x)$  имеет разрыв первого рода, производная в классическом смысле не существует. Однако формальное дифференцирование равенств (I.5.4) и (I.5.5) приводит к соотношениям

$$\theta'(x) = \delta(x), \quad \theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0), \quad (\text{I.6.1})$$



соответствующим образом определяющим производные единичной функции в точках разрывов и позволяющим считать единичную функцию *обобщенной первообразной* для  $\delta$ -функции.

Соотношениями (I.6.1) определяется так называемая *обобщенная производная* единичной функции. Так как  $\delta(x) = 0$  при всех  $x \neq 0$ , то на всей оси, кроме точки  $x = 0$ , значения обобщенной и классической производной совпадают.

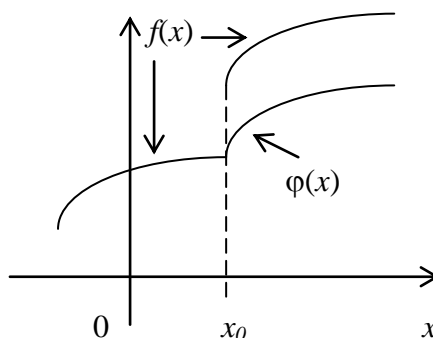


Рис. I.6.1.

Определим теперь обобщенную производную для произвольной кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функции. Сначала рассмотрим случай, когда функция  $f(x)$  имеет только одну точку разрыва первого рода при  $x = x_0$  и дифференцируема во всех остальных точках (рис. I.6.1).

Построим вспомогательную функцию  $\varphi(x)$ , совпадающую с  $f(x)$  для  $x < x_0$ , а при  $x > x_0$  получаемую из функции  $f(x)$  путем параллельного переноса последней на величину  $[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]$ . С помощью единичной функции эта вспомогательная функция запишется так

$$\varphi(x) = f(x) - [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\theta(x - x_0). \quad (\text{I.6.2})$$

В точке  $x = x_0$  функция  $\varphi(x)$  имеет устранимый разрыв. Доопределив ее соответствующим образом в этой точке, мы сделаем функцию  $\varphi(x)$  непрерывной всюду. Теперь из соотношения (I.6.2) определим функцию  $f(x)$

$$f(x) = \varphi(x) + [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\theta(x - x_0). \quad (\text{I.6.3})$$

В качестве обобщенной производной  $f'_{\circ\delta}(x)$  функции  $f(x)$  примем результат дифференцирования равенства (I.6.3) с учетом соотношений (I.6.1)

$$f'_{об}(x) = \varphi'(x) + [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\delta(x - x_0). \quad (I.6.4)$$

Здесь  $\varphi'(x)$  – производная функции  $\varphi(x)$  в обычном классическом смысле, поэтому  $\varphi'(x) = f'_{кл}(x)$ , если  $x \neq x_0$ . Таким образом, окончательно имеем

$$f'_{об}(x) = f'_{кл}(x) + [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\delta(x - x_0). \quad (I.6.5)$$

Если функция  $f(x)$  имеет не одну точку разрыва, а несколько, то, очевидно,

$$f'_{об}(x) = f'_{кл}(x) + \sum_{i=1}^n [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)]\delta(x - x_i), \quad (I.6.6)$$

где  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  – точки разрывов первого рода функции  $f(x)$ .

Таким образом, разрывную функцию можно дифференцировать в обобщенном смысле. Тогда производная содержит импульсные составляющие.

## 7. Понятие о производных $\delta$ -функции

Так как  $\delta$ -функция не является обычной функцией, это обобщенная функция, идеализирующая предельное поведение иглообразных функций  $\delta(x, \lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$  в интеграле

$$\int_a^b f(x)\delta(x, \lambda)dx,$$

то, разумеется, нельзя определить производную от нее как предел отношения

$$\frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{h}$$

при  $h \rightarrow 0$ .

Естественно рассмотреть предельное поведение интеграла

$$\int_a^b f(x) \frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{h} dx,$$

где  $f(x)$  — функция, дифференцируемая в интервале  $(a, b)$ , а  $(-h, h) \in (a, b)$ .

В силу фильтрующего свойства  $\delta$ -функции

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{h} dx &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^b f(x) \delta(x+h) dx - \int_a^b f(x) \delta(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{h} [f(-h) - f(0)] = -\frac{f(0) - f(-h)}{h}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{h} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ -\frac{f(0) - f(-h)}{h} \right] = -f'(0).$$

Если числа  $a$  и  $b$  одного знака, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{h} dx = 0.$$

Введем обозначение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{h} dx = \int_a^b f(x) \delta'(x) dx. \quad (\text{I.7.1})$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) \delta'(x) dx = \begin{cases} -f'(0), & 0 \in (a, b); \\ 0, & 0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (\text{I.7.2})$$

Аналогично

$$\int_a^b f(x) \delta'(x - x_0) dx = \begin{cases} -f'(x_0), & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (I.7.3)$$

Введенный формулой (I.7.1) символ  $\delta'(x)$  называется производной от  $\delta$ -функции. Это тоже обобщенная функция.

Если функция  $f(x)$  дважды дифференцируемая в интервале  $(a, b)$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \frac{\delta'(x+h) - \delta'(x)}{h} dx = \int_a^b f(x) \delta''(x) dx. \quad (7.I.4)$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_a^b f(x) \delta''(x) dx = \begin{cases} (-1)^2 f''(0), & 0 \in (a, b); \\ 0, & 0 \notin (a, b), \end{cases}$$

и

$$\int_a^b f(x) \delta''(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^2 f''(x_0), & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (I.7.5)$$

Производные высших порядков определяются по индукции. Если функция  $f(x)$   $n$  раз дифференцируемая в интервале  $(a, b)$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \frac{\delta^{(n-1)}(x+h) - \delta^{(n-1)}(x)}{h} dx = \int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x) dx,$$

причем

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x) dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(0), & 0 \in (a, b); \\ 0, & 0 \notin (a, b), \end{cases}$$

и

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (I.7.6)$$

Производные  $\delta$ -функции, как и саму  $\delta$ -функцию, в технике также часто называют *импульсными функциями*.

## 8. Интегралы, содержащие $\delta$ -функцию

При определении интеграла

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx$$

с помощью равенства (I.3.3) мы предполагали, что функция  $f(x)$  является непрерывной в окрестности точки  $x = 0$ . Пусть теперь функция  $f(x)$  при  $x = 0$  терпит разрыв первого рода. Как и раньше, рассмотрим поведение интеграла

$$\int_a^b f(x)\delta(x, \lambda)dx$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Если интервал  $(a, b)$  не содержит точки  $x = 0$ , то нетрудно показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x)\delta(x, \lambda)dx = 0.$$

Если же точка  $x = 0 \in (a, b)$ , то поведение рассматриваемого интеграла при  $\lambda \rightarrow 0$  зависит от выбора иглообразной функции  $\delta(x, \lambda)$ . Оказывается, что иглообразную функцию можно построить так, чтобы интеграл

$$\int_a^b f(x)\delta(x, \lambda)dx$$

при  $\lambda \rightarrow 0$  стремился к какому угодно числу, заключенному между  $f(-0)$  и  $f(+0)$ . Чаще всего в случае *симметричной*  $\delta$ -функции (когда  $\delta(x, \lambda)$  симметрична относительно точки  $x = 0$ ) полагают

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \frac{f(+0) + f(-0)}{2},$$

в случае *правосторонней*  $\delta$ -функции

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(+0).$$

Различия в определении  $\delta$ -функции приходится учитывать и в том случае, когда функция  $f(x)$  непрерывна в окрестности точки  $x = 0$ , но один из пределов интегрирования (например, нижний) равен нулю. В этом случае доказывается, что если  $\delta(x)$  – *симметричная* функция, то

$$\int_0^b f(x) \delta(x) dx = \frac{1}{2} f(0),$$

если  $\delta(x)$  – *правосторонняя* функция, то

$$\int_0^b f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

Если же вместо интеграла  $\int_0^b f(x) \delta(x) dx$  рассмотреть интеграл

$$\int_{-0}^b f(x) \delta(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0-0} \int_a^b f(x) \delta(x) dx,$$

то независимо от выбора  $\delta$ -функции

$$\int_{-0}^b f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

Последнее замечание переносится и на случай производных высших порядков от  $\delta$ -функции: для любой  $n$  раз дифференцируемой функции

$$\int_{-0}^b f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

## 9. Обобщенные функции. Функциональный подход

Обобщенные функции можно ввести различными способами. Разобранный выше подход (*секвенциальный подход*) состоит в рассмотрении обобщенных функций как пределов последовательностей обычных функций. Этот подход проще и ближе к интуитивным представлениям физиков, уже П. А.-М. Дирак был уверен в том, что его дельта-функцию можно аппроксимировать последовательностями обычных функций.

Одним из самых ранних методов был метод функционалов, предложенный С. Л. Соболевым и Л. Шварцем. Его «недостаток» состоит в том, что он требует глубокого знания функционального анализа. Перечислим основные факты из теории обобщенных функций при таком подходе.

Напомним, что функционалом на некотором множестве функций  $\varphi(x)$  называют произвольное правило, при помощи которого каждой функции  $\varphi(x)$  из этого множества ставится в соответствие определенное число. Таким образом, понятие функционала является естественным обобщением понятия функции.

В качестве указанного множества функций  $\varphi(x)$  рассматривается множество  $K$  всех вещественных функций, каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и *финитна*, т. е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой из функций  $\varphi(x)$ ). Определённые таким образом функции  $\varphi(x)$  называются *основными*, а их множество  $K$  – *основным пространством*.

Пусть, например, задана некоторая функция  $f(x)$ , абсолютно интегрируемая в каждой конечной области вещественной прямой  $(-\infty, +\infty)$ . Такие функции называют *локально интегрируемыми*. С помощью функции  $f(x)$  можно каждой основной функции  $\varphi(x)$  поставить в соответствие определенное число

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (I.9.1)$$

Так как функция  $\varphi(x)$  финитна, то интеграл приходится распространять только на конечный промежуток, поэтому отпадают трудности, связанные со сходимостью на бесконечности. Таким образом, функцию  $f(x)$  можно представить как функционал на пространстве  $K$  основных функций. Нетрудно убедиться, что данный функционал будет линейным и непрерывным, т. е. будут выполнены условия:

- а) для любых вещественных чисел  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и любых основных функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  имеет место равенство (свойство линейности функционала  $f$ ):  $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$ ;
- б) если последовательность основных функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  стремится к нулю в пространстве  $K$ , то последовательность чисел  $(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \dots, \boxed{\phantom{0}}, \dots$  сходится к нулю (свойство непрерывности функционала  $f$ ).



Функционал (I.9.1) представляет собой частный пример линейного непрерывного функционала на пространстве  $K$ . Можно указать и функционалы иного типа. Например, функционал, который ставит в соответствие каждой функции  $\varphi(x)$  ее значение в точке  $x = 0$ , очевидно, линеен и непрерывен. Можно показать, что он не может быть представлен в виде (I.9.1) ни при какой локально интегрируемой функции  $f(x)$ . Этот функционал называют дельта-функцией и обозначают  $\delta(x)$ ; таким образом,

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0). \quad (\text{I.9.2})$$

«Сдвинутая» дельта-функция – функционал  $\delta(x-x_0)$ , определяемый равенством

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0). \quad (\text{I.9.3})$$

**Определение 2.** Обобщённой функцией называется каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве  $K$ . Обобщенные функции, задаваемые формулами вида (I.9.1), называются *регулярными*, все остальные (в том числе  $\delta$ -функция) – *сингулярными*.

Для обобщенной функции иногда оказывается удобным сохранить то же обозначение  $f(x)$ , которое применяется для обычной функции. Кроме того, часто вместо  $(f, \varphi)$  даже для сингулярной обобщенной функции пишут

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx,$$

хотя такая запись и не имеет смысла, с точки зрения классического анализа. В частности, записывают так:

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad (\text{I.9.4})$$

хотя и не существует локально интегрируемой функции  $\delta(x)$ , с помощью которой можно поставить в соответствие функции  $\varphi(x)$  ее значение при  $x = 0$ , т. е. число  $\varphi(0)$ .

Для обобщенных функций могут быть определены различные операции:

- сложение и вычитание двух обобщенных функций  $f$  и  $g$

$$(f \pm g, \varphi) = (f, \varphi) \pm (g, \varphi);$$

- умножение обобщенной функции  $f$  на бесконечно дифференцируемую функцию  $a(x)$  (в том числе и константу  $a(x) \equiv \text{const}$ )

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi).$$

В некоторых случаях можно осуществлять преобразование в области аргументов обобщенных функций:

- сдвиг обобщенной функции  $f(x)$  на вектор  $h$

$$(f(x-h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+h));$$

в частности,

$$(\delta(x-h), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+h)) = \varphi(h);$$

- отражение от начала координат

$$(f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x));$$

- преобразование подобия

$$\left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right), \varphi(x)\right) = \alpha (f(x), \varphi(\alpha x)).$$

Дифференцирование и интегрирование обобщенных функций определяются в соответствии с формулами

$$(f^{(q)}, \varphi) = (-1)^q (f, \varphi^{(q)}); (F, \varphi') = -(f, \varphi), F' = f,$$

причем первообразная  $F$  обобщённой функции  $f$  определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Приведем еще несколько формул, вытекающих из свойств дельта-функции. Если  $a(x)$  достаточно гладкая функция, то

$$a(x)\delta(x - \xi) = a(\xi)\delta(x - \xi),$$

$$a(x)\delta'(x - \xi) = a(\xi)\delta'(x - \xi) - a'(\xi)\delta(x - \xi),$$

$$a(x)\delta''(x - \xi) = a(\xi)\delta''(x - \xi) - 2a'(\xi)\delta'(x - \xi) + a''(\xi)\delta(x - \xi),$$

$$a(x)\delta^{(k-1)}(x - \xi) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a^{(m)}(\xi) C_{k-1}^m \delta^{(k-m)}(x - \xi),$$

где  $\boxed{\phantom{C_{k-1}^m}}$  – биномиальные коэффициенты.

## 10. Некоторые применения $\delta$ -функции

С помощью  $\delta$ -функции удобно записывать многие физические соотношения, поэтому она широко используется в математической и теоретической физике. Так,  $\delta$ -функция дает возможность перенести важное понятие плотности массы или заряда на случай их дискретного распределения.

Рассмотрим, например, тонкий стержень, один конец которого помещен в начало координат, а другой – в точку  $x = l$ . Пусть на стержне в точке  $x = a$  размещен груз массы  $m_a$ . Будем считать, что размеры груза малы по сравнению с длиной стержня, но масса груза имеет тот же порядок, что и масса стержня. Тогда при решении таких задач как определение полной массы или положения равновесия приходится рассматривать и массу стержня (распределенную массу  $m_p$ ) и массу груза (сосредоточенную массу  $m_c$ ).

Пусть  $\rho_p(x)$  – распределенная плотность стержня, тогда распределенная масса стержня выразится интегралом

$$m_p = \int_0^l \rho_p(x) dx, \quad (\text{I.10.1})$$

а полная масса стержня вместе с грузом суммой

$$m = m_a + \int_0^l \rho_p(x) dx. \quad (\text{I.10.2})$$

С помощью  $\delta$ -функции сосредоточенную массу  $m_a$  можно представить как массу, распределенную с плотностью

$$\rho_c(x) = m_a \delta(x - a),$$

так как

$$\int_0^l \rho_c(x) dx = m_a \int_0^l \delta(x - a) dx = m_a = m_c,$$

поскольку  $x = a \in (0, l)$ .

Таким образом, введя в рассмотрение функцию  $\rho_c(x)$ , можно выражение для сосредоточенной массы записывать в форме, по виду совпадающей с формой записи для распределенной массы (I.10.1). Если теперь положить

$$\rho(x) = \rho_p(x) + \rho_c(x) = \rho_p(x) + m_a \delta(x - a),$$

то полная масса выразится при помощи интеграла

$$m = \int_0^l \rho(x) dx, \quad (\text{I.10.3})$$

как и распределенная масса (I.10.1).

Если на рассматриваемом стержне в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, l)$  помещены грузы, малые по величине, но с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , соизмеримыми с массой стержня, то сосредоточенная плотность всех грузов выразится в виде

$$\rho_c(x) = \sum_{i=1}^n m_i \delta(x - x_i),$$

а сосредоточенная масса всех грузов будет определяться по формуле

$$m_c = \int_0^l \rho_c(x) dx = \int_0^l \sum_{i=1}^n m_i \delta(x - x_i) dx.$$

Если  $\rho(x) = \rho_p(x) + \rho_c(x)$ , то для вычисления полной массы стержня вместе с грузами пользуются формулой (I.10.3).

Точно также находим положение центра тяжести стержня

$$x_c = \frac{\int_0^l x \rho(x) dx}{\int_0^l \rho(x) dx},$$

независимо от того, имеются на стержне сосредоточенные массы или нет.

Укажем еще одну область приложения  $\delta$ -функции. В механике наряду с действием сил, плавно меняющихся с течением времени, приходится рассматривать резкие удары, столкновения тел. При ударе на тело действует кратковременная, но значительная по величине сила. В большинстве случаев детальное изучение зависимости ударной силы от времени не представляет интереса. Достаточно бывает знать лишь импульс силы. Если  $I_y$  – импульс удара, а  $t_y$  – момент удара, то силу, возникающую при ударе, можно записать так:

$$F_y(t) = I_y \delta(t - t_y).$$

Часто использование  $\delta$ -функции существенно облегчает решение задачи. Рассмотрим такой пример. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  неограниченная струна получает в точке  $x = x_0$  поперечный удар, передающий струне импульс  $I$ . Требуется сформулировать задачу для определения отклонений  $u(x, t)$  точек струны от положения равновесия при  $t > 0$ , предполагая, что начальные отклонения точек струны и начальные скорости равны нулю.

Будем сначала считать импульс равномерно распределенным по малому отрезку  $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ . Тогда краевая задача формулируется следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v^2 = \frac{T}{\rho}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_0 - \varepsilon, \\ \frac{I}{2\varepsilon\rho}, & x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \\ 0, & x_0 + \varepsilon < x < +\infty. \end{cases}$$

Здесь  $\rho$  – линейная плотность струны,  $T$  – натяжение струны.

После решения сформулированной задачи в полученном решении необходимо будет перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Используя  $\delta$ -функцию, можно сформулировать краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v^2 = \frac{T}{\rho}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0).$$

Коэффициент при  $\delta$ -функции выбирается так, чтобы суммарный импульс, передаваемый струне в момент времени  $t = 0$ , был равен  $I$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \rho dx = I.$$

Читателю рекомендуется решить эту задачу в обеих постановках (*указание*: воспользоваться решением Даламбера [2, 3]).

### 11. Представление закона распределения внешней нагрузки с помощью обобщенных функций

С помощью единичных функций удобно изображать эпюры распределенных внешних нагрузок. Пусть на балку на участке  $a \leq x \leq b$  действует распределенная нагрузка, определяемая законом  $f(x)$  (рис. I.11.1). Тогда ее можно представить одним аналитическим выражением

$$q(x) = f(x) [\theta(x - a) - \theta(x - b)].$$

Если трактовать интенсивность нагрузки как предельный случай совокупности сосредоточенных сил, приложенных к точкам балки, то интенсивность нагрузки при действии сосредоточенной силы, приложенной к точке  $x = a$  (рис. I.11.2) можно

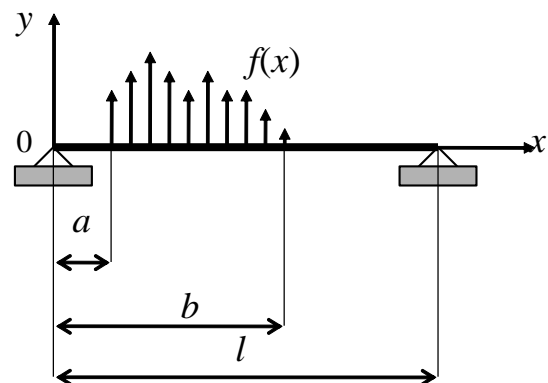


Рис. I.11.1

представить следующим образом: сосредоточенную силу в точке  $x = a$  можно получить как предельный переход от распределенной нагрузки  $q_0$  на участке  $(a, a + \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для распределенной нагрузки имеем

$$q(x) = q_0 [\theta(x - a + \varepsilon) - \theta(x - a)] = q_0 \varepsilon \frac{[\theta(x - a + \varepsilon) - \theta(x - a)]}{\varepsilon}.$$

Полагая  $P = q_0 \varepsilon = \text{const}$ , в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$q(x) = P \frac{d}{dx} \theta(x - a) = P \delta(x - a).$$

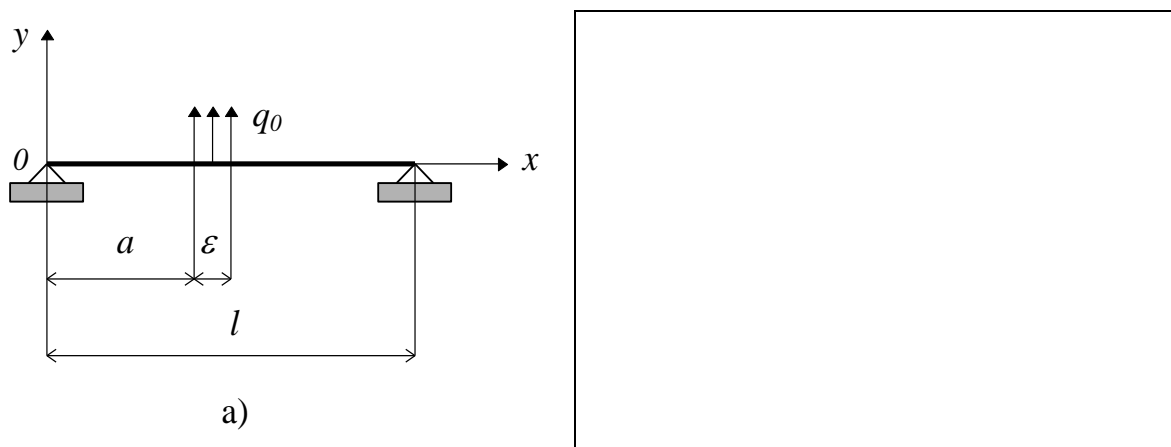


Рис. I.11.2

Если на балку в сечении  $x = a$  действует сосредоточенный момент  $M$ , то, как нетрудно понять, закон распределения нагрузки в этом случае определяется функцией  $M\delta'(x - a)$ .

С помощью  $\delta$ -функции и единичной функции можно изображать также сосредоточенные деформации и перемещения. Допустим, что известно сосредоточенное изменение угла между смежными сечениями балки при  $x = a$  на весьма малую величину  $\Delta\gamma$  (рис. I.11.3). Априори заданное изменение угла может возникнуть как результат расклинивания стыков сварки или вследствие неточности сборки. От действия сосредоточенной деформации (рис. I.11.3, а)) может произойти изменение углов наклона сечений по всей длине балки



$$\gamma = \gamma_0 - \Delta\gamma\theta(x-a),$$

где  $\gamma_0$  – угол наклона оси над опорой (угол поворота сечений по часовой стрелке считается отрицательным). Кроме сосредоточенной угловой деформации, в сечении  $x = a$  может быть задан сосредоточенный сдвиг на малую величину  $\Delta v$  без изменения угла между сечениями (рис. I.11.3, б)). Примером сдвига  $\Delta v$  может быть уступ вследствие неточности склепки или сварки отдельных частей. При этом происходит поворот всех остальных сечений балки.

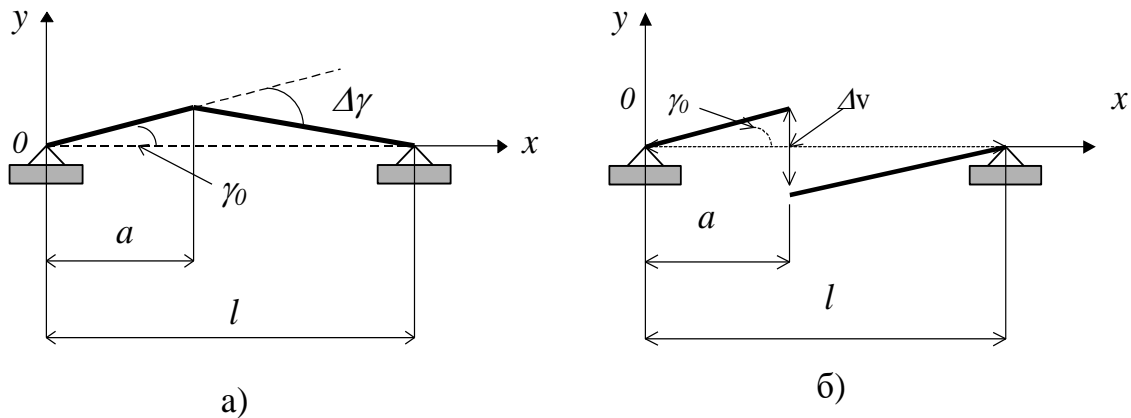


Рис. I.11.3

Прогибы такой балки определяются уравнением

$$v(x) = \gamma_0 x - \Delta v \theta(x-a),$$

углы наклона получаются дифференцированием

$$\gamma(x) = \gamma_0 - \Delta v \delta(x-a).$$

С помощью  $\delta$ - и единичной функции можно учесть ребра жесткости, подкрепляющие оболочку или пластину, изломы поверхности оболочки, наличие отверстий, разрезов, местных искажений в виде выпуклостей или вогнутостей поверхности и т. п.

Теория обобщенных функций одной переменной легко переносится на случай  $n$  переменных, в частности, двух переменных. Дельта-функция двух

переменных  $\delta(x - \xi, y - \eta)$ , сингулярная относительно точек  $(\xi, \eta)$ , равна нулю для всех точек плоскости, кроме точек с координатами  $x = \xi, y = \eta$ , где ее значение настолько велико, что имеет место равенство

$$\int_a^b \int_c^d \delta(x - \xi, y - \eta) dx dy = 1, \quad a < \xi < b, \quad c < \eta < d.$$

Из этого определения следует, что

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta). \quad (\text{I.11.1})$$

Фильтрующее свойство  $\delta$ -функции двух переменных выражается равенством для любой непрерывной функции  $f(x, y)$  в рассматриваемой области

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \delta(x - \xi, y - \eta) dx dy = f(\xi, \eta), \quad a < \xi < b, \quad c < \eta < d. \quad (\text{I.11.2})$$

С помощью единичной функции,  $\delta$ -функции двух переменных и их производных удобно описывать локальные нагрузки, действующие на пластины, оболочки и поверхность упругого тела.

Если, например, на пластину в точке с координатами  $x = x_0, y = y_0$  действует сосредоточенная сила  $P$ , направленная по нормали к ее срединной плоскости, то выражение для интенсивности нагрузки можно представить в виде

$$p(x, y) = P \delta(x - x_0, y - y_0) = P \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (\text{I.11.3})$$

Пусть на пластину в точках  $A_1$  и  $A_2$ , расположенных на расстоянии  $\varepsilon$  вдоль по оси  $n$ , действует пара сосредоточенных сил, момент которой  $M = P\varepsilon$ . В таком случае интенсивность нагрузки, действующей на пластину, может быть представлена формулой

$$p(x, y) = P \delta(A_1) - P \delta(A_2) = M \frac{\delta(A_1) - \delta(A_2)}{\varepsilon},$$

где  $\delta(A_1)$  и  $\delta(A_2)$  – дельта-функции двух переменных, сингулярные относительно точек  $A_1$  и  $A_2$  (рис. I.11.4).

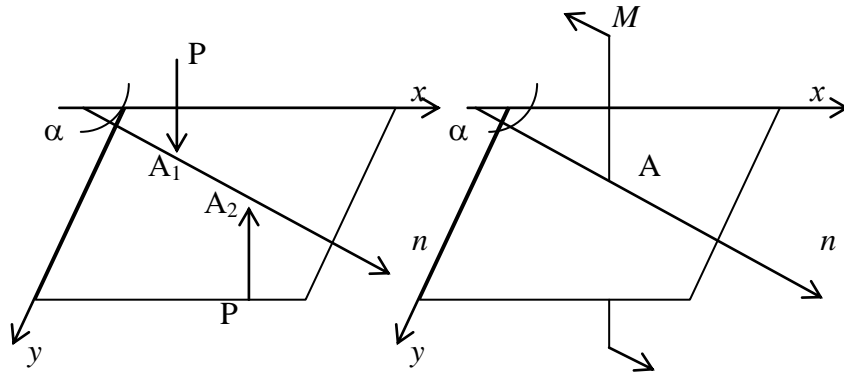


Рис. I.11.4.

В пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  точки  $A_1$  и  $A_2$  сольются в одну точку  $A$  и мы получим ( $M = P\varepsilon = \text{const}$ )

$$p(x, y) = M \frac{\partial \delta(A)}{\partial n}$$

или

$$p(x, y) = M \left[ \frac{\partial \delta(A)}{\partial x} \cos(\alpha) + \frac{\partial \delta(A)}{\partial y} \sin(\alpha) \right], \quad (\text{I.11.4})$$

где  $\alpha$  – угол между осями  $x$  и  $n$ .

В частном случае пары сил, параллельных осям координат, имеем соответственно (рис. I.11.5)

$$p(x, y) = m_x = M \delta'(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (\text{I.11.5})$$

$$p(x, y) = m_y = M \delta(x - x_0) \delta'(y - y_0). \quad (\text{I.11.6})$$

Интенсивность нагрузки, распределенной вдоль прямой  $x = x_0$  по закону  $q = q(y)$ , можно представить в виде

$$p(x, y) = q(y)\delta(x - x_0). \quad (11.7)$$

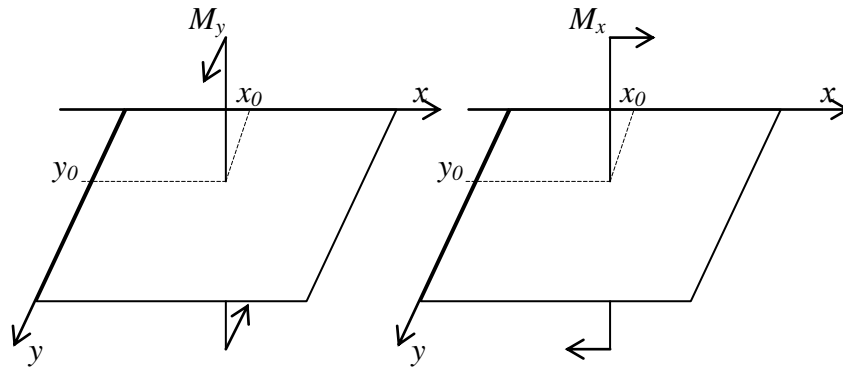


Рис. I.11.5.

## 12. Понятие об обобщенных решениях в математической физике

Во многих задачах математической физики существование решения устанавливается лишь при значительных ограничениях на краевые условия. Мы введем одно понятие, которое позволит не заниматься далее этими вопросами.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (I.12.1)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (I.12.2)$$

Как известно [2], решением этой задачи будет функция

$$u = \frac{1}{2} [\Phi(x + vt) + \Phi(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(\xi) d\xi. \quad (12.3)$$

Эта формула дает классическое решение волнового уравнения только в предположении, что  $\Phi(x)$  имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а  $\Psi(x)$  – до первого.

Задача Коши (I.12.1), (I.12.2) поставлена *корректно*. Действительно, полученное решение единственно, что следует из способа вывода формулы (I.12.3). Несомненно далее непрерывная зависимость решения (I.12.3) от начальных данных. В самом деле, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что если заменить  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  на  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{\Psi}(x)$  так, что

$$|\Phi(x) - \tilde{\Phi}(x)| < \delta, \quad |\Psi(x) - \tilde{\Psi}(x)| < \delta, \quad -\infty < x < \infty,$$

то разность между новым решением  $\tilde{u}(x, t)$  и первоначальным  $u(x, t)$  будет по абсолютной величине меньше  $\varepsilon$  на любом конечном отрезке времени. Это утверждение легко следует из формулы (I.12.3).

При решении конкретных физических задач может оказаться, что функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  не удовлетворяют указанным условиям. Тогда нельзя утверждать, что существует решение задачи Коши. В этом случае вводят так называемые *обобщенные решения* задачи Коши.

Будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (I.12.1) при начальных условиях (I.12.2) функцию  $u(x, t)$ , являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности решений  $u_n(x, t)$  уравнения (I.12.1) при начальных условиях

$$u_n(x, 0) = \Phi_n(x), \quad \left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi_n(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

если последовательность функций  $\Phi_n(x)$ , имеющих непрерывные вторые производные, сходится равномерно к  $\Phi(x)$ , а последовательность функций

$\Psi_n(x)$ , имеющих непрерывные первые производные, сходится равномерно к  $\Psi(x)$ .

Нетрудно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для уравнения (I.12.1) при любых непрерывных функциях  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ . Это обобщенное решение также дается формулой (I.12.3).

Введение обобщенных решений уравнения (I.12.1) естественно тем, что, во-первых, для существования обычного (классического) решения задачи Коши приходится на заданные функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  налагать весьма жесткие условия гладкости, в то время как для существования обобщенных решений такой гладкости от заданных функций не требуется. Во-вторых, функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  в конкретных задачах физики известны только приближенно. Поэтому соответствующая функция  $u(x,t)$ , даваемая формулой (I.12.3), также является только некоторым приближением к точному решению поставленной задачи.

Следовательно, совершенно безразлично, является ли это приближение обычным или обобщенным решением задачи Коши. Важно, что оно будет мало отличаться от истинного решения, если только функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  равномерно мало отличаются от истинных начальных значений  $u(x,0)$  и  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ .

Мы говорили сейчас об обобщенном решении задачи Коши для одномерного волнового уравнения. То же самое относится к общему волновому уравнению, уравнению теплопроводности и уравнению Пуассона.

Рассмотрим уравнение распространения тепла в ограниченной области  $\Omega$  пространства переменных  $(x, y, z)$  с граничной поверхностью  $S$  при

наличии внутренних источников тепла с плотностью  $F(x, y, z, t)$ . Пусть  $u(x, y, z, t)$  – температура в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  и мы имеем три последовательности непрерывных функций:  $F_n$ ,  $\varphi_n$  и  $f_n$ , равномерно сходящиеся соответственно к непрерывным функциям  $F$ ,  $\varphi$  и  $f$ , и у уравнения

$$\Delta u_n - \frac{\partial u_n}{\partial t} = F_n$$

при условиях

$$u_n|_{t=0} = \varphi_n, \quad u_n|_S = f_n.$$

существует решение  $u_n$  (оно единственно). Можно доказать, что разность  $u_m - u_n$  по абсолютной величине сколь угодно мала, если  $m$  и  $n$  достаточно велики\*. Значит, последовательность  $u_n$  равномерно сходится к функции  $u$ , удовлетворяющей нашим предельным условиям.

О сходимости производных от  $u$  ничего не известно, и поэтому нельзя утверждать, что предельная функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = F.$$

Будем называть функцию  $u$  *обобщенным решением уравнения теплопроводности* при заданных начальных и краевых условиях. Такое обобщенное решение единственно, так как не может существовать двух последовательностей  $u_n$  и  $\tilde{u}_n$ , у которых функции  $f_n$  и  $\tilde{f}_n$ ,  $\varphi_n$  и  $\tilde{\varphi}_n$ ,  $F_n$  и  $\tilde{F}_n$  стремились бы соответственно к одному пределу, а сами последовательности – к различным пределам, потому что при этом последовательность  $u_1, \tilde{u}_1, u_2, \tilde{u}_2, \dots, u_n, \tilde{u}_n, \dots$  расходилась бы, что невозможно.

---

\* *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – М., Наука, 1966, – 444 с.

Вместо того чтобы ставить задачу об отыскании истинного решения, практически достаточно решать задачу об отыскании обобщенного решения. Действительно, в физических задачах неизвестны точные величины  $F$ ,  $\varphi$  и  $f$ . Те их значения, которые мы берем, не являются точными, а лишь мало отличаются от точных. Поэтому обобщенное решение, даже если оно не истинное, мало будет отличаться от последнего.

Так же, как и в случае уравнения теплопроводности, можно определить обобщенное решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = \rho$$

при условиях

$$u|_S = \varphi$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \psi,$$

как предел решений уравнения  $\Delta u = \rho_k$  при условиях

$$u|_S = \varphi_k$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \psi_k,$$

если  $\rho_k \rightarrow \rho$ ,  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $\psi_k \rightarrow \psi$ , причем сходимость равномерная.

Определим обобщенное решение общего волнового уравнения. Сделаем предварительно некоторые замечания. Рассмотрим функцию  $u(x, y, z, t)$  четырех независимых переменных – трех координат произвольной точки из некоторой области  $\Omega$  и  $t$ , интегрируемую с квадратом по  $x, y, z$  для любого значения  $t$  из некоторого промежутка. Будем считать, что функция  $u(x, y, z, t)$  непрерывна в среднем по переменной  $t$  в точке  $t_0$ , если величина



$$\left\{ \iiint_{\Omega} [u(x, y, z, t_0 + h) - u(x, y, z, t_0)]^2 dx dy dz \right\}^{\frac{1}{2}}$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом  $|h|$ . Функцию, непрерывную в среднем в каждой точке промежутка  $\alpha \leq t \leq \beta$ , будем называть непрерывной в среднем на этом промежутке.

Для всякой функции переменных  $(x, y, z)$ , заданной в области  $\Omega$  и имеющей интегрируемый квадрат, величину

$$\|u\| = \left\{ \iiint_{\Omega} [u(x, y, z)]^2 dx dy dz \right\}^{\frac{1}{2}}$$

будем называть *нормой функции*  $u$ .

Пользуясь понятием нормы, определение непрерывности в среднем можно переформулировать следующим образом: функция  $u(x, y, z, t)$  называется непрерывной в среднем в точке  $t_0$ , если каково бы ни было положительное число  $\varepsilon$ , можно указать такое положительное число  $\delta(\varepsilon)$ , что

$$\|u(t + h) - u(t)\| < \varepsilon,$$

как только  $|h| < \delta(\varepsilon)$  (здесь аргументы  $(x, y, z)$  у функции  $u$  опущены для краткости).

Последовательность функций  $u_n(x, y, z, t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) будем называть равномерно сходящейся в среднем к функции  $u_0(x, y, z, t)$ , если неравенство

$$\|u_n - u_0\| = \left\{ \iiint_{\Omega} [u_n(x, y, z, t) - u_0(x, y, z, t)]^2 dx dy dz \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

справедливо для всех  $t$  из заданного промежутка, как только  $n \geq N(\varepsilon)$ .

Справедлива следующая **теорема**: *предел равномерно сходящейся в среднем последовательности функций  $u_n(x, y, z, t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), каждая из*

которых непрерывна в среднем, есть также непрерывная в среднем функция.\*

Будем говорить, что функция  $u$ , интегрируемая со своим квадратом в некоторой области  $\Omega$ , есть предел в среднем для последовательности  $u_n$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{\Omega} [u_n - u]^2 dx dy dz = 0.$$

Рассмотрим теперь в области  $\Omega$ , ограниченной поверхностью  $S$ , волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi$$

и при условиях на границе

$$u|_S = f,$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = q.$$

Будем называть *обобщенным решением волнового уравнения* функцию  $u$ , являющуюся пределом в среднем для последовательности функций  $u_n$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta u_n - \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = F_n$$

и соответствующим дополнительным условиям

$$u_n|_{t=0} = \varphi_n, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}|_{t=0} = \psi_n,$$

---

\* С.Л. Соболев. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1966, – 444 с.

$$u_n|_S = f_n,$$

либо

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} \Big|_S = q_n,$$

где последовательности  $F_n$ ,  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$ ,  $f_n$  и  $q_n$  сходятся в среднем соответственно к  $F$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $f$  и  $q$ .

Можно доказать, что обобщенное решение волнового уравнения существует и единственно.

## Глава 2.

### МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе рассматривается общий метод получения частных интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями в виде обобщённых  $\delta$ -функций и их производных, на основании которого записываются точные аналитические решения таких уравнений.

#### **1. О решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами**

Многие задачи физики и механики сводятся к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Трудность интегрирования таких уравнений часто заключается в том, что правая часть их есть функция от  $x$ , имеющая разные аналитические выражения на различных участках. Рассмотрение начнем с одного метода решения этих уравнений, который применялся еще О. Л. Коши.

Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение порядка  $n$  с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_n u \equiv L(u) = 0. \quad (\text{II.1.1})$$

Возьмем произвольную систему линейно независимых частных решений

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n,$$

и построим из них новую систему частных решений  $U_k$ , обладающих таким свойством:

$$U_k(0) = U_k'(0) = U_k''(0) = \dots = U_k^{(n)}(0) = 0, \quad U_k^{(k-1)}(0) = 1, \quad (\text{II.1.2})$$

что всегда возможно. Для этого надо взять линейную комбинацию из частных решений  $u_i$

$$U_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} u_i.$$

Коэффициенты  $c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}, \dots, c_{kn}$  найдем из системы

$$\sum_{i=1}^n c_{ki} u_i^{(s)}(0) = \delta_{ks}. \quad (\text{II.1.3})$$

Ее определитель есть определитель Вронского для системы функций  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  при  $x = 0$ , он отличен от нуля вследствие линейной независимости функций  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ . Поэтому всегда можно найти коэффициенты  $c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}, \dots, c_{kn}$  и фактически всегда построить функцию  $U_k(x)$ .

Образуюем систему таких частных решений:  $U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)$ .

Каждая из этих функций обладает свойством (II.1.2).

Составим следующую таблицу, в которой сведены начальные значения функций и их производных:

	$U(0)$	$U'(0)$	$U''(0)$	$U'''(0)$	...
$U_1$	1	0	0	0	...
$U_2$	0	1	0	0	...
$U_3$	0	0	1	0	...
...	...	...	...	...	...

Во всех клетках этой таблицы стоят нули, лишь на главной диагонали – единицы. Поэтому система  $U_k$  частных решений уравнения (II.1.1) называется

системой с единичной матрицей. Будем строить общий интеграл уравнения (II.1.1) именно с помощью данной системы частных решений, линейная независимость которой усматривается из того факта, что ее определитель Вронского при  $x = 0$  есть определитель единичной матрицы, следовательно, равен единице. Таким образом,

$$u(x) = \sum_{i=1}^n C_i U_i(x).$$

Займемся теперь решением неоднородного уравнения

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_n u \equiv L(u) = f(x). \quad (\text{II.1.4})$$

Докажем следующую **теорему**: *интеграл уравнения (II.1.4), обращающийся в нуль вместе со своими производными до порядка  $n - 1$  включительно при  $x = 0$ , дается формулой*

$$u = \int_0^x U_n(x - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (\text{II.1.5})$$

► Вычислим последовательные производные функции  $u(x)$ , определяемой с помощью (II.1.5). Здесь  $x$  одновременно является и верхним пределом интеграла, и параметром, поэтому по известной теореме анализа

$$u'(x) = U_n(0) f(x) + \int_0^x U_n'(x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

Но  $U_n(0) = 0$  вследствие специального выбора функций  $U_k(x)$ . Продолжая процесс дифференцирования, найдем

$$u''(x) = \int_0^x U_n''(x - \xi) f(\xi) d\xi$$

и т. д. до производной  $n - 1$  порядка включительно. Производная порядка  $n$

$$u^{(n)}(x) = U_n^{(n-1)}(0)f(x) + \int_0^x U_n^{(n)}(x-\xi)f(\xi)d\xi,$$

причем  $U_n^{(n-1)}(0) = 1$ .

Подставим теперь все последовательные производные функции  $u(x)$  в уравнение (П.1.4). Вследствие постоянства коэффициентов  $C_i$  под интегралом получится та же комбинация производных функций  $U_n(x)$ , что и в операторе  $L(u)$ , т. е.

$$\int_0^x L(U_n)f(\xi)d\xi + f(x) = f(x).$$

Но  $U_n$  есть решение уравнения (П.1.1),  $L(U_n) = 0$ , поэтому мы имеем тождество, что и доказывает теорему. ◀

Формула (П.1.5) дает не какое-нибудь частное решение уравнения (П.1.4), а решение, обращающееся в нуль вместе со своими производными до порядка  $n-1$  включительно при  $x=0$ . Это большое преимущество полученного решения, упрощающее определение постоянных из начальных условий.

Общий интеграл уравнения (П.1.4) может быть представлен следующим образом

$$u(x) = \sum_{i=1}^n C_i U_i(x) + \int_0^x U_n(x-\xi)f(\xi)d\xi.$$

Постоянные  $C_i$  имеют здесь совершенно определенные значения. Действительно, положим  $x=0$ . Тогда

$$u(0) = C_0.$$

Вычислим производную от  $u$  порядка  $k - 1$  и положим  $x = 0$ . В правой части обратятся в нуль все члены, кроме содержащего множителем  $U_k$ , так как  $U_k^{(k-1)}(0) = 1$ . Находим, что

$$u^{(k-1)}(0) = C_k.$$

Таким образом,

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u^{(i-1)}(0)U_i(x) + \int_0^x U_n(x-\xi)f(\xi)d\xi. \quad (\text{II.1.6})$$

Выражение (II.1.6) представляет общий интеграл линейного дифференциального уравнения с правой частью в форме, наиболее удобной для приложений. Постоянные интегрирования имеют здесь простой смысл: это начальные (при  $x = 0$ ) значения искомой функции и ее производных. Потому метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на формуле (II.1.6) называется *методом начальных параметров*. Он широко применяется в сопротивлении материалов и строительной механике.

В качестве примера рассмотрим известное в сопротивлении материалов уравнение изгиба балки

$$w'' = \frac{M(x)}{EJ}.$$

Соответствующее однородное уравнение  $w'' = 0$ . Его частные решения, обладающие единичной матрицей, суть  $U_1 = 1$ ,  $U_2 = x$ . Действительно,  $U_1(0) = 1$ ,  $U_1'(0) = 0$ ,  $U_2(0) = 0$ ,  $U_2'(0) = 1$ . По формуле (II.1.6)

$$w(x) = w(0) \cdot 1 + w'(0) \cdot x + \int_0^x (x-\xi) \frac{M(\xi)}{EJ} d\xi. \quad (\text{II.1.7})$$

По теореме Коши



$$\int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi = \int_0^x \int_0^x f(x) dx dx .$$

## 2. Частично вырожденные уравнения

Пусть  $\mathbf{T}_1$  и  $\mathbf{T}_2$  операторы с областями определения  $\mathfrak{Z}_1$  и  $\mathfrak{Z}_2$  соответственно. Уравнение

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (\text{II.2.1})$$

где  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ , называется частично вырожденным, если обратный по отношению к  $\mathbf{T}_1$  оператор  $\mathbf{T}_1^{-1}$  существует, а оператор  $\mathbf{T}_2$  вырожденный, т. е.

$$\mathbf{T}_2\mathbf{u} = \Phi[x, (f_1, \mathbf{u}), (f_2, \mathbf{u}), \dots, (f_k, \mathbf{u})], \quad (\text{II.2.2})$$

здесь  $\Phi$  – некоторая функция точки  $x$   $n$ -мерного пространства и  $k$  параметров  $(f_l, \mathbf{u})$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ), представляющих собой значения некоторых функционалов  $f_l$  на  $\mathbf{u}(x)$ .

Обозначим  $\mathfrak{R}$  область значений оператора  $\mathbf{T}$ , т. е. множество элементов вида  $\{\mathbf{T}\varphi\}$ , где  $\varphi$  пробегает  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2$ .

Очевидно, если  $\mathbf{F} \in \mathfrak{R}$ , то решение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  уравнения (II.2.1) существует, причём  $\mathbf{u} \in \mathfrak{Z}$ . Так как  $\mathbf{T}_1\mathbf{u}^* = \mathbf{F} - \mathbf{T}_2\mathbf{u}^*$ , то с учетом (II.2.2) и обозначений  $(f_l, \mathbf{u}) = \mu_l^*$  имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_1^{-1} \left[ \mathbf{F} - \Phi(x, \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*) \right], \quad l = 1, 2, \dots, k, \quad (\text{II.2.3})$$

а также

$$\mu_l^* = (f_l, \mathbf{T}_1^{-1}) \left[ \mathbf{F} - \Phi(x, \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*) \right]. \quad (\text{II.2.4})$$

Выражением (II.2.3), содержащим  $k$  параметров  $\mu_l^*$ , и системой  $k$  уравнений (II.2.4) относительно этих параметров представлено формальное решение частично вырожденного уравнения (II.2.1) в «смешанной форме». Чтобы получить решение этого уравнения в явном виде, необходимо найти решение системы (II.2.4), удовлетворяющее условиям

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_1^{-1} \left[ \mathbf{F} - \Phi(x, \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*) \right] &\in \mathfrak{S}_2 \\ \mathbf{F} - \Phi(x, \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*) &= \mathbf{F}^* \in \mathfrak{R}_1 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II.2.5})$$

где  $\mathfrak{R}_1$  – область значений оператора  $\mathbf{T}_1$ . Если такое решение системы (II.2.4) существует, то при найденных значениях параметров  $\mu^*$  выражением (II.2.3) даётся решение уравнения (II.2.1).

Примерами частично вырожденных уравнений могут служить интегральные и интегродифференциальные уравнения с вырожденным ядром. К частично вырожденным уравнениям относятся и уравнения с сингулярными коэффициентами. Действительно, пусть

$$\mathbf{T}_2 \mathbf{u} = \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{k=1}^m D^\alpha \delta(x - x_k) \mathbf{T}_{2\alpha_k} \mathbf{u}, \quad (\text{II.2.6})$$

где  $D^\alpha \delta(x - x_k)$  – частная производная  $\delta$ -функции порядка

$$|\alpha| = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

сосредоточенной в точке  $x_k$ ;  $\mathbf{T}_{2\alpha_k}$  – некоторые операторы.

На основании свойств  $\delta$ -функции

$$\begin{aligned} D^\alpha \delta(x - x_k) \mathbf{T}_{2\alpha_k} \mathbf{u} &= \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^{|i|} \prod_{j=1}^n C_{\alpha_j}^{i_j} \left[ D^i \mathbf{T}_{2\alpha_k} \mathbf{u} \right] \Big|_{x=x_k} D^{\alpha-i} \delta(x - x_k), \end{aligned} \quad (\text{II.2.7})$$

откуда следует, что оператор (II.2.6) является вырожденным, так как величины  $\left[ D^i \mathbf{T}_{2\alpha_k} \mathbf{u} \right]_{x=x_k}$  можно трактовать как значения некоторых сингулярных функционалов  $f_{\alpha i_k}$  на  $\mathbf{u}(x)$ . Напомним, что в (II.2.7)  $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  целочисленный вектор, составляющие  $i_j$  которого пробегают значения  $0, 1, 2, 3, \dots, \alpha_j$ ;  $n$ -кратная сумма

$$\sum_{i=0}^{\alpha} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{i_1=\alpha_1, \dots, i_n=\alpha_n} = \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{i_n=0}^{\alpha_n}$$

$C_n^k$  – биномиальные коэффициенты.

Уравнение с сингулярными коэффициентами

$$(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

является, таким образом, частично вырожденным

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{u} + \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha} C_{\alpha i} (f_{\alpha i_k}, \mathbf{u}) D^{\alpha-i} \delta[x - x_k] = \mathbf{F}, \quad (\text{II.2.8})$$

где  $C_{\alpha i} = (-1)^{|\alpha-i|} \prod_{j=1}^n C_{\alpha_j i_j}$ .

Формальное решение уравнения (II.2.8) в «смешанной форме», согласно (II.2.3), (II.2.4), будет

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_1^{-1} \left[ \mathbf{F} - \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha} C_{\alpha i} \mu_{\alpha i_k} D^{\alpha-i} \delta(x - x_k) \right], \quad (\text{II.2.9})$$

$$\mu_{\tilde{\alpha} \tilde{i}_k} = D^{\tilde{i}} \mathbf{T}_{2\tilde{\alpha}_{\tilde{k}}} \mathbf{T}_1^{-1} \left[ \mathbf{F} - \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha} C_{\alpha i} \mu_{\alpha i_k} D^{\alpha-i} \delta(x - x_k) \right]_{x=x_{\tilde{k}}} \quad (\text{II.2.10})$$

$(|\tilde{\alpha}| \leq r; \tilde{k} = 1, 2, \dots, m; \tilde{i}_j \leq \tilde{\alpha}_j).$

Если решение  $\bar{\mu} = \bar{\mu}^*$  системы (П.2.10), удовлетворяющее также условиям  $\mathbf{T}_1^{-1}F^* \in \mathfrak{Z}_2$  и  $\mathbf{F}^* \in \mathfrak{R}_1$ , где

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} - \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha} C_{\alpha i} \mu_{\alpha i}^* D^{\alpha-i} \delta(x - x_k),$$

существует, то выражением (П.2.9) при  $\bar{\mu} = \bar{\mu}^*$  даётся решение уравнения (П.2.8).

### **3. Общее решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с особенностями импульсного типа в правой части**

Метод, который будем использовать для построения общего решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с особенностями импульсного типа в правой части, известен в литературе как метод Стеклова–Лиувилля–Фубини [3, 4]. Основная идея этого метода состоит в «сравнении» заданного дифференциального уравнения с помощью интегрального уравнения типа Вольтерры с подходящим «приближающим» уравнением, которое можно проинтегрировать явно или для которого известны некоторые специальные свойства решений.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathbf{L}^* y(x) = V^*(x), \quad (\text{П.3.1})$$

где  $\mathbf{L}^*$  – линейный дифференциальный оператор порядка  $n$

$$\mathbf{L}^* = D^n + X_1^* D^{n-1} + \dots + X_{n-1}^* D^1 + X_n^*, \quad D^n \equiv \frac{d^n}{d x^n}.$$

В самом общем случае любой из коэффициентов  $X_i^*(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) уравнения (II.3.1), а также правая часть  $V^*(x)$  могут содержать особенности типа дельта-функций и их производных и, кроме того, конечные разрывы, т. е.

$$X^*(x) = X(x) + \sum_i \left[ X_i(x) \theta(x - x_i) + \sum_{m=0}^r a_{im} \delta^{(m)}(x - x_i) \right],$$

$$V^*(x) = V(x) + \sum_i \left[ V_i(x) \theta(x - x_i) + \sum_{m=0}^r b_{im} \delta^{(m)}(x - x_i) \right].$$

Здесь  $X(x)$ ,  $X_i(x)$ ,  $V(x)$ ,  $V_i(x)$  – заданные непрерывные функции;  $a_{im}$ ,  $b_{im}$  – заданные коэффициенты;  $\delta^{(m)}(x - x_i)$  – дельта-функция и ее производные, сосредоточенные в точках  $x = x_i$ ;  $\theta(x - x_i)$  – функция Хэвисайда единичного скачка. Принимая во внимание соотношение

$$f(x) \delta^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i f^{(i)}(0) \delta^{(n-i)}(x), \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad (\text{II.3.2})$$

приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\mathbf{L}y(x) = V^{**}(x) \quad (\text{II.3.3})$$

с регулярными коэффициентами вида

$$X(x) + \sum_i X_i(x) \theta(x - x_i)$$

и правой частью

$$V^{**}(x) = V(x) + \sum_i \left[ V_i(x) \theta(x - x_i) + \sum_{m=0}^r C_{im} \delta^{(m)}(x - x_i) \right] \quad (\text{II.3.4})$$

где коэффициенты  $C_{im}$  представляют собой линейные комбинации значений некоторых сингулярных функционалов на решении уравнения (II.3.1).

Пусть  $\{y_j(x)\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  – фундаментальная система решений однородного уравнения  $\mathbf{L}y(x) = 0$ . Представив частное решение  $y(x) = y^{**}(x)$  уравнения (П.3.3) в виде

$$y^{**}(x) = \sum_{j=1}^n C_j(x) y_j(x), \quad (\text{П.3.5})$$

где  $C_j(x)$  – искомые функции, методом вариации произвольных постоянных Лагранжа найдем

$$\sum_{j=1}^n C_j'(x) y_j^{(s)}(x) = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-2),$$

$$\sum_{j=1}^n C_j'(x) y_j^{(n-1)}(x) = V^{**}(x). \quad (\text{П.3.6})$$

Откуда

$$C_j'(x) = (-1)^{n+j} \frac{W_{nj}(x)}{W(x)} V^{**}(x), \quad (\text{П.3.7})$$

здесь  $W_{nj}(x)$  – минор элемента  $y_j^{(n-1)}(x)$  определителя Вронского  $W(x)$ . Интегрируя (П.3.7) с учётом (П.3.4) и внося результат в (П.3.5), получим общее решение уравнения (П.3.3)

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \left\{ C_j + (-1)^{n+j} \left[ \int_{x_0}^x V_i(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \right. \right.$$

$$+ \sum_i \theta(x - x_i) \left. \left( \int_{x_i}^x V_i(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{m=0}^r (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{W_{nj}(x)}{W(x)} \right) \Big|_{x=x_i} \right) \right\} y_j(x), \quad (\text{П.3.8})$$

В котором  $C_j$  – произвольные постоянные. В точках  $x = x_l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) выражение (II.3.8) принимает вид

$$y(x_l) = \sum_{j=1}^n \left\{ C_j + (-1)^{n+j} \left[ \int_{x_0}^{x_l} V(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \sum_{i=1}^{l-1} \left( \int_{x_i}^{x_l} V_i(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \sum_{m=0}^r (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{W_{nj}(x)}{W(x)} \right) \Big|_{x=x_i} \right) \right] \right\} y_j(x_l). \quad (\text{II.3.9})$$

При  $r < n - 1$  общее решение уравнения (II.3.3) будет непрерывным. При  $r = n - 1$  решение в общем случае будет содержать особенности типа конечных разрывов. Наконец, при  $r > n - 1$  решение в общем случае содержит также особенности типа дельта-функции и её производных до  $(r - n)$ -го порядка включительно. Производная  $p$ -го порядка будет непрерывной, если  $r < n - 1 - p$ . Отсюда следует, что все производные до  $(n - r - 2)$ -го порядка включительно будут непрерывны. Для  $p$ -ой производной ( $p < n - r - 1$ ) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dx^p} y(x) = & \sum_{j=1}^n \left\{ C_j + (-1)^{n+j} \left[ \int_{x_0}^x V(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_i \theta(x - x_i) \left( \int_{x_i}^x V_i(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \sum_{m=0}^r (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{dx^m} \frac{W_{nj}(x)}{W(x)} \Big|_{x=x_i} \right) \right] \right\} \frac{d^p}{dx^p} y_j(x), \quad (\text{II.3.10}) \end{aligned}$$

причем

$$\frac{d^p}{dx^p} y(x) \Big|_{x=x_l} = \sum_{j=1}^n \left\{ C_j + (-1)^{n+j} \left[ \int_{x_0}^{x_l} V(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \right. \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{l-1} \left( \int_{x_i}^{x_j} V_i(\xi) \frac{W_{nj}(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \sum_{m=0}^r (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{W_{nj}(x)}{W(x)} \right) \Big|_{x=x_i} \right) \left. \frac{d^p}{dx^p} y_j(x) \right|_{x=x_j} . \quad (\text{II.3.11})$$

При вычислении производной (II.3.10) учтен известный из теории определителей факт [5]

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \frac{W_{nj}(x)}{W(x)} y_j^{(s)}(x) = \delta_{n-1}^s, \quad s = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (\text{II.3.12})$$

где  $\delta_{n-1}^s$  – символ Кронекера.

#### **4. Уравнение четвёртого порядка с постоянными коэффициентами и особенностями импульсного типа в правой части**

Рассмотрим подробно один частный случай дифференциального уравнения, имеющий большое значение в последующих приложениях, а именно, дифференциальное уравнение вида

$$y^{(4)}(x) + a_1 y^{(3)}(x) + a_2 y^{(2)}(x) + a_3 y^{(1)}(x) + a_4 y^{(0)}(x) = \sum_i \sum_{m=0}^2 C_{im} \delta^{(m)}(x - x_i), \quad (\text{II.4.1})$$

где  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ),  $C_{im}$  – некоторые числовые коэффициенты.

Общее решение уравнения (II.4.1), согласно (II.3.8), имеет вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^4 C_j y_j(x) +$$



$$+ \sum_{j=1}^4 (-1)^{4+j} \sum_i \theta(x-x_i) \sum_{m=0}^2 (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{W_{4j}(x)}{W(x)} \right)_{x=x_i} y_j(x), \quad (\text{II.4.2})$$

где  $y_j(x) = \exp(z_j x)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (II.4.1);  $z_j$  – корни характеристического уравнения

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0, \quad (\text{II.4.3})$$

которые предполагаем различными.

Определитель Вронского  $W(x)$  выражается через определитель Вандермонда, который обозначим  $d$ , по формуле

$$W(x) = d \exp[(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)x], \quad (\text{II.4.4})$$

причем, как известно,

$$d = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4). \quad (\text{II.4.5})$$

По теореме Виета имеем

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -a_1, \quad (\text{II.4.6})$$

а тогда

$$W(x) = \exp(-a_1 x) d. \quad (\text{II.4.7})$$

Учитывая отмеченное свойство (II.4.6) корней характеристического уравнения, нетрудно получить формулу для миноров элементов четвертой строки определителя Вронского

$$W_{4j}(x) = d_{4j} \exp[-(a_1 + z_j)x], \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{II.4.8})$$

где  $d_{4j}$  – миноры элементов четвертой строки определителя Вандермонда  $d$ , причем

$$d_{41} = z_3 z_4 (z_4 - z_3) + z_2 z_3 (z_3 - z_2) + z_2 z_4 (z_2 - z_4),$$

$$\begin{aligned}
d_{42} &= z_3 z_4 (z_4 - z_3) + z_1 z_3 (z_3 - z_1) + z_1 z_4 (z_1 - z_4), \\
d_{43} &= z_2 z_4 (z_4 - z_2) + z_1 z_2 (z_2 - z_1) + z_1 z_4 (z_1 - z_4), \\
d_{44} &= z_2 z_3 (z_3 - z_2) + z_1 z_2 (z_2 - z_1) + z_1 z_3 (z_1 - z_3).
\end{aligned} \tag{II.4.9}$$

И, наконец, отношение определителей

$$\begin{aligned}
\frac{W_{4j}(x)}{W(x)} &= \frac{d_{4j}}{d} \exp(-z_j x), \\
\frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{W_{4j}(x)}{W(x)} \right) &= (-z_j)^m \frac{d_{4j}}{d} \exp(-z_j x).
\end{aligned} \tag{II.4.10}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\Delta(x - x_i) &= \sum_{j=1}^4 (-1)^{4+j} \left( \frac{W_{4j}(\eta)}{W(\eta)} \right) \Big|_{\eta=x_i} y_j(x) = \\
&= \sum_{j=1}^4 (-1)^{4+j} \frac{d_{4j}}{d} \exp[z_j(x - x_i)].
\end{aligned} \tag{II.4.11}$$

С учетом этого обозначения можно записать

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^4 (-1)^{4+j} \sum_{m=0}^2 (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{W_{4j}(x)}{W(x)} \right) \Big|_{x=x_i} y_j(x) = \\
&= \sum_{m=0}^2 (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{d\eta^m} \left[ \sum_{j=1}^4 (-1)^{4+j} \frac{W_{4j}(\eta)}{W(\eta)} y_j(x) \right] \Big|_{\eta=x_i} = \\
&= \sum_{m=0}^2 (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{d\eta^m} \Delta(x - \eta) \Big|_{\eta=x_i}.
\end{aligned} \tag{II.4.12}$$

Теперь формулу (II.4.2) можно переписать в виде

$$y(x) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp(z_j x) + \sum_i \theta(x - x_i) \sum_{m=0}^2 (-1)^m C_{im} \frac{d^m}{d\eta^m} \Delta(x - \eta) \Big|_{\eta=x_i}. \quad (\text{II.4.13})$$

Представляет интерес случай, когда уравнение (II.4.3) является биквадратным; в этом случае  $a_1 = a_3 = 0$  и корни имеют попарно противоположные знаки

$$z_2 = -z_1, \quad z_4 = -z_3. \quad (\text{II.4.14})$$

Следовательно, согласно (II.4.5) и (II.4.7)–(II.4.9), будем иметь

$$W(x) = d, \quad W_{4j}(x) = d_{4j} \exp(-z_j x), \quad d = 4z_1 z_3 (z_3^2 - z_1^2), \quad (\text{II.4.15})$$

$$d_{41} = d_{42} = 2z_3 (z_3^2 - z_1^2), \quad d_{43} = d_{44} = -2z_1 (z_3^2 - z_1^2).$$

С учётом (II.4.14) и (II.4.15) нетрудно получить

$$\Delta(x - \eta) = \frac{1}{(z_3^2 - z_1^2)} \left[ \frac{\text{sh}[z_3(x - \eta)]}{z_3} - \frac{\text{sh}[z_1(x - \eta)]}{z_1} \right],$$

$$\frac{d}{d\eta} \Delta(x - \eta) = \frac{\{\text{ch}[z_1(x - \eta)] - \text{ch}[z_3(x - \eta)]\}}{(z_3^2 - z_1^2)},$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \Delta(x - \eta) = \frac{\{z_3 \text{sh}[z_3(x - \eta)] - z_1 \text{sh}[z_1(x - \eta)]\}}{(z_3^2 - z_1^2)}. \quad (\text{II.4.16})$$

Представляет также интерес случай, когда уравнение (II.4.3) является биквадратным и имеет два кратных корня, которые обозначим  $z$ :

$$z \equiv z_1 = z_3 = -z_2 = -z_4. \quad (\text{II.4.17})$$

В этом случае фундаментальная система решений однородного уравнения будет такой:

$$y_1(x) = e^{zx}, y_2(x) = e^{-zx}, y_3(x) = xe^{zx}, y_4(x) = xe^{-zx}. \quad (\text{II.4.18})$$

Нетрудно получить следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} W(x) &= -16z^4, \\ W_{41}(x) &= -4z(1+zx)e^{-zx}, W_{43} = 4z^2e^{-zx}, \\ W_{42}(x) &= -4z(1-zx)e^{zx}, W_{44} = -4z^2e^{zx}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.4.19})$$

$$\Delta(x-\eta) = \frac{1}{2z^3} \{ z(x-\eta) \operatorname{ch}[z(x-\eta)] - \operatorname{sh}[z(x-\eta)] \},$$

$$\frac{d}{d\eta} \Delta(x-\eta) = -\frac{(x-\eta)}{z} \operatorname{sh}[z(x-\eta)],$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \Delta(x-\eta) = \frac{1}{2z} \{ z(x-\eta) \operatorname{ch}[z(x-\eta)] + \operatorname{sh}[z(x-\eta)] \}. \quad (\text{II.4.20})$$

## 5. Понятие о функции Грина

**Общие замечания.** Одним из важных приложений дельта-функции является построение *функции влияния*, называемой также *функцией Грина* по имени английского математика Дж. Грина (1793–1841). Этот вопрос связан с исследованием дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и уравнений в частных производных). Знание функции Грина, в частности, позволяет сразу написать частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Рассмотрим сначала пример из механики. Пусть исследуется прогиб  $w(x)$  балки под действием внешней поперечной нагрузки, приложенной с плотностью  $q(x)$  (рис. II.5.1, где изображен график, или, как говорят, эпюра, внешней нагрузки).

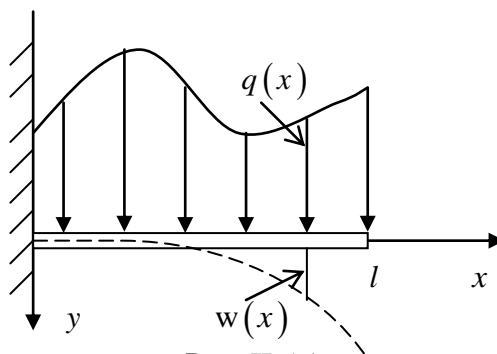


Рис. П.5.1

Будем считать нагрузки не слишком большими, так чтобы можно было воспользоваться законом линейности: при сложении внешних нагрузок прогибы складываются.

Обозначим через  $y = G(x, \xi)$  прогиб в точке  $x$ , полученный в результате приложения в точке  $\xi$  единичной нагрузки. Эта функция  $G(x, \xi)$  и называется функцией влияния в рассматриваемом примере. Покажем, что если она известна, то легко найти прогиб и от воздействия произвольной нагрузки плотностью  $q(x)$ .

Действительно, рассмотрим нагрузку, приходящуюся на участок оси от точки  $\xi$  до точки  $\xi + d\xi$ . Эта нагрузка равна  $q(\xi)d\xi$ ; потому прогиб от нее в точке  $x$  равен  $G(x, \xi)q(\xi)d\xi$ , так как из закона линейности вытекает, что если внешнюю нагрузку умножить на постоянный множитель, то прогиб умножится на тот же множитель. Складывая все такие бесконечно малые прогибы, получаем суммарный прогиб (рис. П.5.1):

$$w(x) = \int_0^l G(x, \xi)q(\xi)d\xi. \quad (\text{П.5.1})$$

Перейдем теперь к общей схеме построения функции влияния. Пусть внешнее воздействие на какой-либо объект описывается функцией  $f(x)$

( $a \leq x \leq b$ ; в приведенном примере это была функция  $q(x)$ ,  $x \in [0, l]$ ), а результат данного воздействия – функцией  $\tilde{f}(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ; в приведенном примере это была функция  $w(x)$ ,  $x \in [0, l]$ ). Таким образом, каждая заданная функция  $f(x)$  по какому-то определенному закону преобразуется в новую функцию  $\tilde{f}(x)$ . Обозначим оператор перехода от функции внешнего воздействия  $f(x)$  к функции «отклика»  $\tilde{f}(x)$  через  $L$ , так что  $Lf(x) = \tilde{f}(x)$ . Будем предполагать, что действует закон линейности, или, как говорят, *принцип суперпозиции*: при сложении внешних воздействий их результаты также складываются. Этот закон, который можно записать в форме

$$L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Lf_1 + c_2 Lf_2, \quad c_1 = \text{const}, \quad c_2 = \text{const},$$

часто применяется, когда внешние воздействия не слишком велики. Оператор, обладающий таким свойством, называется *линейным*.

Обозначим через  $G(x, \xi)$  результат внешнего воздействия, описываемого дельта-функцией  $\delta(x - \xi)$  при некотором фиксированном  $\xi$ , т. е.

$$L[\delta(x - \xi)] = G(x, \xi).$$

Любую функцию  $f(x)$  можно представить в виде суммы «столбчатых» функций (рис. П.5.2), каждая из которых имеет особенность лишь в одной точке  $\xi$ , а потому равна  $f(\xi)d\xi\delta(x - \xi)$  (почему?), т. е.

$$f(x) = \sum f(\xi)d\xi\delta(x - \xi).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} L[f(x)] &= L\left[\sum f(\xi)d\xi\delta(x - \xi)\right] = \\ &= \sum L[f(\xi)d\xi\delta(x - \xi)] = \end{aligned}$$

$$= \sum f(\xi) d\xi L[\delta(x - \xi)] =$$

$$= \sum f(\xi) d\xi G(x, \xi).$$

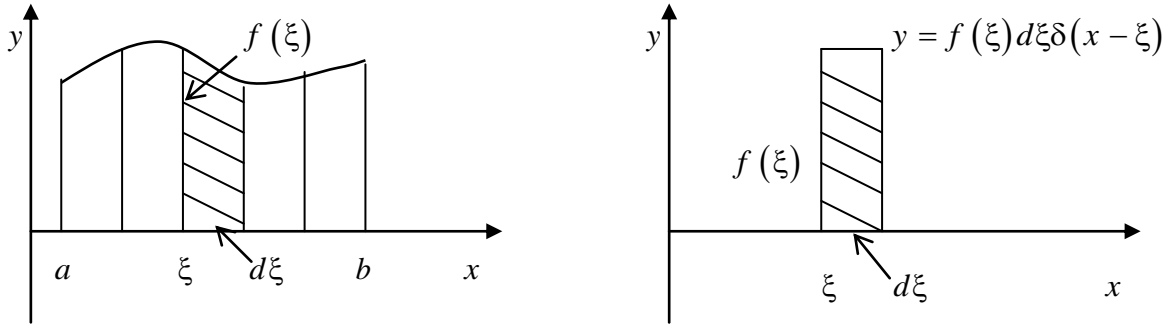


Рис. II.5.2.

Но при бесконечно малых  $d\xi$  последняя сумма является интегралом, т. е. окончательно

$$L[f(x)] = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

(ср. с формулой (II.5.1)).

Приведем простой пример. Пусть рассматривается задача

$$y'' = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (\text{II.5.2})$$

Если взамен  $f(x)$  поставить  $\delta(x - \xi)$ , то при  $0 \leq x < \xi$  и  $\xi < x \leq l$  получаем просто  $y'' = 0$ , т. е. решение

$$y = ax + b \quad (0 \leq x < \xi), \quad y = cx + d \quad (\xi < x \leq l),$$

где  $a, b, c, d$  – какие-то постоянные. Применение краевых условий показывает, что  $b = 0$  и  $cl + d = 0$ , т. е.

$$y = ax \quad (0 \leq x < \xi), \quad y = c(x - l) \quad (\xi < x \leq l). \quad (\text{II.5.3})$$

Если равенство  $y'' = \delta(x - \xi)$  проинтегрировать от  $x = \xi - 0$  до  $x = \xi + 0$ , то имеем  $y'(\xi + 0) - y'(\xi - 0) = 1$ . При вторичном интегрировании дельта-функции получается уже непрерывная функция, так что  $y(\xi + 0) = y(\xi - 0)$ , и из (II.5.3) находим  $c - a = 1$ ,  $a\xi = c(\xi - l)$ , откуда

$$a = -\frac{l - \xi}{l}, \quad c = \frac{\xi}{l}.$$

Подставив в (II.5.3), определим для задачи (II.5.1) функцию влияния:

$$G(x, \xi) \begin{cases} -\frac{(l - \xi)x}{l} & (0 \leq x < \xi); \\ -\frac{\xi(l - x)}{l} & (\xi < x \leq l). \end{cases}$$

В силу формулы (II.5.1), получаем решение задачи (II.5.2) при любой функции  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_0^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{(l - x)}{l} \int_0^x \xi f(\xi) d\xi - \frac{x}{l} \int_x^l (l - \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

### **Функция Грина дифференциальных операторов второго порядка.**

Рассмотрим построение функции Грина для регулярных обыкновенных линейных дифференциальных операторов второго порядка следующего вида:

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u,$$

причем будем считать, что функция  $u(x)$  подчинена некоторым заданным граничным условиям. Именно такие операторы наиболее часто встречаются в различных задачах классической математической физики.



Функцией Грина краевой задачи называется функция  $G(x, \xi)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1) при фиксированном  $\xi \in [a, b]$  функция  $u(x) = G(x, \xi)$  непрерывна; производные  $u'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}$  и  $u''(x) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$  также непрерывны в  $[a, b]$ , кроме точки  $x = \xi$ , причем скачок функции  $u'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}$  в точке  $x = \xi$  равен

$$\frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)};$$

- 2) при фиксированном  $\xi \in [a, b]$  функция  $u(x) = G(x, \xi)$  аргумента  $x$  удовлетворяет при  $x \neq \xi$ , т. е. в каждом из интервалов  $[a, \xi)$  и  $(\xi, b]$ , уравнению  $Lu = 0$  и заданным краевым условиям при  $x = a$  и  $x = b$ .

Справедливы следующие утверждения:

- 1) если краевая задача  $Lu = 0$  имеет лишь тривиальное решение, то оператор  $L$  – одну и только одну функцию Грина;
- 2) если уравнение  $Lu = 0$  имеет только тривиальное решение, то для любой функции  $f(x)$ , непрерывной в интервале  $[a, b]$ , существует решение уравнения  $Lu = f$ , которое задается формулой

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Это формула обращения дифференциального оператора при помощи функции Грина (здесь  $G(x, \xi)$  – функция Грина оператора  $L$ ).

Исходя из сформулированного определения функции Грина, легко построить алгоритм ее нахождения. Приведем соответствующую процедуру в системе аналитических вычислений Maple:

```
> green_function:=
proc(LinOp, y, bound1, bound2, G, g1, g2)
local u, u1, u2, p, L, e1, e2, e3, e4,
alpha1, alpha2, beta1, beta2;
L:=value(LinOp); p:=-coeff(L, diff(y(x), x, x));
u:=dsolve(L, output=basis);
u1:=unapply(u[1], x); u2:=unapply(u[2], x);
alpha1*u1(x)+alpha2*u2(x); g1:=unapply(%, x);
beta1*u1(x)+beta2*u2(x); g2:=unapply(%, x);
e1:=value(subs(y=g1, bound1));
e2:=value(subs(y=g2, bound2));
e3:=g2(xi)-g1(xi)=0;
e4:=D(g2)(xi)-D(g1)(xi)=1/subs(x=xi, p);
solve({e1, e2, e3, e4},
{alpha1, alpha2, beta1, beta2});
assign(%);
factor(simplify(expand(g1(x))));
g1:=unapply(-%, x, xi);
factor(simplify(expand(g2(x))));
g2:=unapply(-%, x, xi);
G:=(x, xi)->piecewise(x<=xi,
```

```

g1(x, xi), x >= xi, g2(x, xi));
G(x, xi);
G(x, xi) := normal(%); y := 'y';
end proc:

```

Процедура имеет семь формальных параметров. Параметр `LinOp` (входной) задает дифференциальное выражение; параметр `y` (входной) – неизвестная функция; параметры `bound1`, `bound2` (входные) задают граничные условия на левом и правом концах отрезка; параметры `G`, `g1`, `g2` – (выходные) собственно функция Грина и составляющие ее выражения для  $x \leq \xi$  и  $\xi \leq x$  (эти выражения необходимы для вычисления интеграла при обращении дифференциального оператора).

Рассмотрим применение этой процедуры к решению конкретных задач.

**Задача 1.** Построить функцию Грина следующего оператора:

$$-(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

С ее помощью найти решение краевой задачи

$$-(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = x^2, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

**Решение.** Определяем задачу в Maple

```
> L := -(1+x^2)*diff(y(x), x, x) - 2*x*diff(y(x), x),
```

```
y(0) - D(y)(0) = 0, y(1) = 0;
```

$$L := -(1+x^2)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 2x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right), \quad y(0) - D(y)(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

```
> LinOp := L[1]; bound1 := L[2]; bound2 := L[3];
```

$$LinOp := -(1+x^2)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 2x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)$$

$$\text{bound1} := y(0) - D(y)(0) = 0$$

$$\text{bound2} := y(1) = 0$$

Находим функцию Грина с помощью процедуры `grin_function`

```
> green_function(LinOp, y, bound1, bound2, G, g1, g2) :
> G(x, xi) ;
```

$$G(x, \xi) := \begin{cases} \frac{(1 + \arctan(x))(-4 \arctan(\xi) + \pi)}{4 + \pi} & x \leq \xi \\ \frac{(1 + \arctan(\xi))(\pi - 4 \arctan(x))}{4 + \pi} & \xi \leq x \end{cases}$$

Построим теперь решение краевой задачи для неоднородного уравнения с помощью полученной функции Грина. Задаем неоднородное уравнение

```
> ode := LinOp = x^2 ;
```

$$\text{ode} := -(1 + x^2) \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) - 2x \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) = x^2$$

Вычисляем искомую функцию

```
> y := Int(xi^2 * g2(x, xi), xi=0..x) +
      Int(xi^2 * g1(x, xi), xi=x..1) ;
```

$$y := \int_0^x \frac{\xi^2 (1 + \arctan(\xi)) (\pi - 4 \arctan(x))}{4 + \pi} d\xi + \int_x^1 \frac{\xi^2 (1 + \arctan(x)) (-4 \arctan(\xi) + \pi)}{4 + \pi} d\xi$$

```
> y := unapply(simplify(value(y)), x) ;
```

$$y := x \rightarrow \frac{1}{6} (-\pi x^2 + \pi \ln(1 + x^2) - 4x^2 + 4 \ln(1 + x^2) - 4 \arctan(x) \ln(2) + 4 - 4 \ln(2) + 4 \arctan(x)) / (4 + \pi)$$

Сделаем проверку:

```
> simplify(ode);
simplify(bound1);
simplify(bound2);
```

$$x^2 = x^2$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Как видим, все в порядке!

Для сравнения непосредственно с помощью функции `dsolve` получим решение нашей краевой задачи

```
> y := 'y' :
> dsolve({ode, bound1, bound2}, y(x)); assign(%):
> simplify(ode);
> y := unapply(y(x), x);
> simplify(bound1); simplify(bound2);
```

$$y(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) - \frac{2}{3} \frac{(\ln(2)-1) \arctan(x)}{4+\pi} - \frac{2}{3} \frac{\ln(2)-1}{4+\pi}$$

$$x^2 = x^2$$

$$y := x \rightarrow -\frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) - \frac{2}{3} \frac{(\ln(2)-1) \arctan(x)}{4+\pi} - \frac{2}{3} \frac{\ln(2)-1}{4+\pi}$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Здесь сразу же сделали проверку найденного решения.

**Задача 2.** С помощью функции Грина найти решение следующей краевой задачи:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} - y = e^{-x} \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

**Решение.** Определяем задачу в Maple

```
> _L4 := -diff(y(x), x, x) - y(x), y(0) = 0, y(Pi/2) = 0;
```

$$_L4 := -\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) - y(x), y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Строим функцию Грина

```
> LinOp := _L4[1]; bound1 := _L4[2]; bound2 := _L4[3];
green_function(LinOp, y, bound1, bound2, G, g1, g2):
G(x, xi);
```

$$LinOp := -\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) - y(x)$$

$$bound1 := y(0) = 0$$

$$bound2 := y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$G(x, \xi) := \begin{cases} \cos(\xi) \sin(x) & x \leq \xi \\ \sin(\xi) \cos(x) & \xi \leq x \end{cases}$$

Выписываем решение этой краевой задачи

```
> y := Int(exp(-xi) * cos(xi) * g2(x, xi), xi = 0..x) +
> Int(exp(-xi) * cos(xi) * g1(x, xi), xi = x..Pi/2);
```

$$y := \int_0^x e^{(-\xi)} \cos(\xi) \sin(\xi) \cos(x) d\xi + \int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{(-\xi)} \cos(\xi)^2 \sin(x) d\xi$$

```
> y := combine(value(y));
```

$$y := -\frac{2}{5} \sin(x) e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{2}{5} e^{(-x)} \sin(x) - \frac{1}{5} \cos(x) e^{(-x)} + \frac{1}{5} \cos(x)$$

Делаем проверку:

```
> y := unapply(y, x);
> simplify(_L4[1]);
```

```
> simplify(bound1);
```

```
> simplify(bound2);
```

$$y := x \rightarrow -\frac{2}{5} \sin(x) e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{2}{5} e^{(-x)} \sin(x) - \frac{1}{5} \cos(x) e^{(-x)} + \frac{1}{5} \cos(x)$$
$$\cos(x) e^{(-x)}$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Все в порядке! Для сравнения непосредственно с помощью функции `dsolve` получим решение краевой задачи

```
> y := 'y' :
```

```
ode := -diff(y(x), x, x) - y(x) = exp(-x) * cos(x);
```

```
dsolve({ode, bound1, bound2}, y(x)); assign(%);
```

```
y := unapply(y(x), x);
```

```
simplify(ode);
```

```
simplify(bound1);
```

```
simplify(bound2);
```

$$ode := -\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) - y(x) = \cos(x) e^{(-x)}$$
$$y(x) = -\frac{2}{5} \sin(x) e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{1}{5} (\cos(x) - 2 \sin(x)) e^{(-x)}$$
$$y := x \rightarrow -\frac{2}{5} \sin(x) e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{5} \cos(x) - \frac{1}{5} (\cos(x) - 2 \sin(x)) e^{(-x)}$$
$$\cos(x) e^{(-x)} = \cos(x) e^{(-x)}$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Здесь также сразу сделали проверку полученного решения. Как видим, решения могут быть представлены в самой разной форме.

Отметим, что приведенное определение функции Грина можно сформулировать, используя понятие дельта-функции Дирака  $\delta(x - \xi)$ , а именно, функцией Грина краевой задачи для уравнения

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u = f(x)$$

(причем будем считать, что функция  $u(x)$  подчинена некоторым заданным граничным условиям) называется функция  $G(x, \xi)$ , удовлетворяющая уравнению

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dG}{dx} \right] + q(x)G = \delta(x - \xi),$$

и заданным краевым условиями.

Рассмотрим применение этого определения к решению конкретных краевых задач с использованием системы Maple.

**Задача 3.** С помощью функции Грина найти решение следующей краевой задачи:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = e^{-x} \cos x, \quad u(0) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

**Решение.** Определяем задачу в Maple

```
> ode1 := diff(u(x), x, x) + u(x) = exp(-x) * cos(x);
```

$$ode1 := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) + u(x) = e^{(-x)} \cos(x)$$

```
> bc := u(0) = 0, u((1/2)*Pi) = 0;
```

$$bc := u(0) = 0, u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$



Находим функцию Грина

```
> ode := diff(u(x), x, x) + u(x) = Dirac(x-xi);
```

$$ode := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) + u(x) = \text{Dirac}(x - \xi)$$

```
> assume(`and`(xi < (1/2)*Pi, xi > 0));
```

```
> dsolve({bc, ode}, u(x));
```

$$u(x) = -\sin(\xi) \cos(x) - \text{Heaviside}(-x + \xi) \sin(x - \xi)$$

```
> G := unapply(rhs(%), x, xi);
```

$$G := (x, \xi) \rightarrow -\sin(\xi) \cos(x) - \text{Heaviside}(-x + \xi) \sin(x - \xi)$$

Вычисляем решение задачи

```
> assume(`and`(x < (1/2)*Pi, x > 0));
```

```
> y := int(exp(-xi)*cos(xi)*G(x, xi),
```

```
xi = 0 .. (1/2)*Pi);
```

$$y := \frac{1}{5} \frac{2 \sin(x) e^{-x} + \cos(x) \sqrt{e^\pi} - 2 \sin(x) \sqrt{e^\pi}}{\sqrt{e^\pi} e^x} - \frac{1}{5} \cos(x)$$

```
> u := unapply(y, x);
```

$$u := x \rightarrow \frac{1}{5} \frac{2 \sin(x) e^{-x} + \cos(x) \sqrt{e^\pi} - 2 \sin(x) \sqrt{e^\pi}}{\sqrt{e^\pi} e^x} - \frac{1}{5} \cos(x)$$

Выполняем проверку уравнения и граничных условий:

```
> simplify(ode1); simplify(bc);
```

$$e^{(-x)} \cos(x) = e^{(-x)} \cos(x)$$

$$0 = 0$$

Как видим, все в порядке!

## 6. Функция Грина линейного дифференциального оператора

**Общее определение обратного оператора.** Оператор  $B$  называется *обратным по отношению к оператору\**  $A$ , если область определения  $D_B$  оператора  $B$  совпадает с областью значений  $R_A$  оператора  $A$  и если для всех  $x \in D_A$

$$B(Ax) = x.$$

Обратный оператор обозначается через  $A^{-1}$ . Следовательно, для любого  $x \in D_A$

$$A^{-1}(Ax) = x. \quad (\text{II.6.1})$$

**1.** Если оператор  $A$  имеет обратный, то и оператор  $A^{-1}$  имеет обратный, причем

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

► Действительно, равенство (II.6.1) показывает, что область значений  $R_{A^{-1}}$  оператора  $A^{-1}$  совпадает с областью определения  $D_A$  оператора  $A$ . Далее, применяя оператор  $A$  к обеим частям (II.6.1) и полагая  $y = Ax$ , получаем

$$AA^{-1}y = y. \quad (\text{II.6.2})$$

для всех  $y \in R_A = D_{A^{-1}}$ . Это как раз и означает, что  $A$  – обратный по отношению к  $A^{-1}$ . ◀

---

\*  $A$  и  $B$  здесь не предполагаются линейными.

**2.** Если оператор  $A$  линеен и оператор  $A^{-1}$  существует, то оператор  $A^{-1}$  линеен.

► Действительно, если  $y_1, y_2 \in D_{A^{-1}} = R_A$ , то

$$A(\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2) = \alpha_1 A A^{-1} y_1 + \alpha_2 A A^{-1} y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$

поэтому  $\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ . ◀

**3.** Оператор  $A$  имеет обратный тогда и только тогда, когда уравнение

$$Ax = 0 \tag{II.6.3}$$

имеет единственное «тривиальное» решение  $x = 0$ .

► Пусть оператор  $A$  имеет обратный  $A^{-1}$ . Применяя  $A^{-1}$  к обеим частям (II.6.3), получим  $x = 0$ , следовательно, условие необходимо. Пусть, обратно, оно выполнено. Тогда при любом  $y \in R_A$  уравнение

$$Ax = y \tag{II.6.4}$$

имеет единственное решение  $x \in D_A$ . Действительно, в силу условия  $y \in R_A$ , такое решение существует. Оно единственно, ибо если также  $Ax' = y$ , то  $A(x - x') = 0$ . По условию равенство (II.6.4) возможно лишь при  $x - x' = 0$ , т. е.  $x = x'$ . Каждому элементу  $y \in R_A$  поставим в соответствие решение  $x$  уравнения (II.6.4). Легко видеть, что это соответствие есть оператор, обратный к оператору  $A$ . ◀

**Задача обращения дифференциального оператора.** Пусть  $L$  – дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x) y$$

и краевыми условиями

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что соответствующая однородная задача  $Ly = 0$  имеет только тривиальное решение  $y = 0$ . Это означает, что для любой фундаментальной системы решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  уравнения  $l(y) = 0$  ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

равен  $n$ , следовательно,

$$\det \|U_i(y_j)\|_{i,j=1,2,\dots,n} \neq 0. \quad (\text{II.6.5})$$

Тогда, как известно, оператор  $L$  имеет обратный  $L^{-1}$ , область определения которого совпадает с областью значений оператора  $L$ . Наша задача – найти явный вид оператора  $L^{-1}$ . Мы увидим, что  $L^{-1}$  есть интегральный оператор с непрерывным ядром; это ядро называется *функцией Грина* оператора  $L$ .

**Построение функции Грина.** *Функцией Грина* оператора  $L$  называется функция  $G(x, \xi)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) функция  $G(x, \xi)$  непрерывна и имеет непрерывные производные по  $x$  до  $(n - 2)$ -го порядка включительно для всех значений  $x, \xi \in [a, b]$ ;
- 2) при любом фиксированном  $\xi \in [a, b]$  функция  $G(x, \xi)$  имеет непрерывные производные  $(n - 1)$ -го порядка и  $n$ -го порядка по  $x$  в каждом из интервалов  $[a, \xi)$  и  $(\xi, b]$ , причем производная  $(n - 1)$ -го порядка имеет при  $x = \xi$  скачок  $\frac{1}{p_0(\xi)}$ :

$$\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)};$$

3) в каждом из интервалов  $[a, \xi)$  и  $(\xi, b]$  функция  $G(x, \xi)$ , рассматриваемая как функция от  $x$ , удовлетворяет уравнению  $l(G) = 0$  и краевым условиям  $U_\nu(y) = 0, \nu = 1, 2, \dots, n$ .

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** *Если краевая задача  $Ly = 0$  имеет лишь тривиальное решение, то оператор  $L$  имеет одну и только одну функцию Грина.*

Доказательство этой теоремы изложено, например, в [6]. Поскольку это доказательство дает фактический метод построения функции Грина, воспроизведем его.

► Пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – линейно независимые решения уравнения  $l(y) = 0$ . Так как в интервале  $[a, \xi)$  функция  $G(x, \xi)$  удовлетворяет этому же уравнению, то должно быть

$$G(x, \xi) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x), \quad a \leq x < \xi,$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – некоторые функции от  $\xi$ . Аналогично,

$$G(x, \xi) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x), \quad \xi < x \leq b.$$

Условия непрерывности функции  $G(x, \xi)$  и ее первых  $(n - 2)$  производных при  $x = \xi$  дают

$$\left[ a_1 y_1(\xi) + a_2 y_2(\xi) + \dots + a_n y_n(\xi) \right] - \left[ b_1 y_1(\xi) + b_2 y_2(\xi) + \dots + b_n y_n(\xi) \right] = 0,$$

$$\left[ a_1 y_1'(\xi) + a_2 y_2'(\xi) + \dots + a_n y_n'(\xi) \right] - \left[ b_1 y_1'(\xi) + b_2 y_2'(\xi) + \dots + b_n y_n'(\xi) \right] = 0,$$

.....



где  $U_{va}(y)$  – сумма всех слагаемых, содержащих  $y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}$ , а  $U_{vb}(y)$  – сумма всех слагаемых, содержащих  $y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)}$ . Тогда

$$U_v(G) = a_1 U_{va}(y_1) + \dots + a_n U_{va}(y_n) + b_1 U_{vb}(y_1) + \dots + b_n U_{vb}(y_n) = 0.$$

Подставляя сюда вместо  $a_v$  их выражения  $a_v = b_v - c_v$ , получим

$$b_1 U_{vb}(y_1) + \dots + b_n U_{vb}(y_n) + (b_1 - c_1) U_{va}(y_1) + \dots + (b_n - c_n) U_{va}(y_n) = 0.$$

Отсюда, в силу (II.6.7)

$$b_1 U_{vb}(y_1) + \dots + b_n U_{vb}(y_n) = c_1 U_{va}(y_1) + \dots + c_n U_{va}(y_n). \quad (\text{II.6.8})$$

При  $v = 1, 2, \dots, n$  равенство (II.6.8) представляет собой систему уравнений относительно  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , определитель которой отличен от нуля, согласно условию (II.6.5). Следовательно, система (II.6.8) имеет единственное решение относительно  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Но тогда формулы  $a_v = b_v - c_v$  однозначно определяют функции  $a_v$ . Тем самым существование и единственность функции Грина доказаны. ◀

**Обращение дифференциального оператора при помощи функции Грина.** Пусть краевая задача  $Ly = 0$  имеет только тривиальное решение  $y = 0$ , так что существует обратный оператор  $L^{-1}$ . Если  $L^{-1}f = y$ , то

$$Ly = f. \quad (\text{II.6.9})$$

Это означает, что функция  $y$  есть решение уравнения

$$l(y) = f, \quad (\text{II.6.10})$$

удовлетворяющее условиям

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{II.6.11})$$

Можно показать, что данное решение существует для любой функции  $f(x)$ , непрерывной в интервале  $[a, b]$ , и определяется при помощи функции Грина [6]. Именно, справедлива теорема:

**Теорема 2.** *Если краевая задача  $Ly = 0$  имеет лишь тривиальное решение, то для любой функции  $f(x)$ , непрерывной в интервале  $[a, b]$ , существует решение краевой задачи  $Ly = f$ . Это решение дается формулой*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi)$  – функция Грина оператора  $L$ .

Доказательство этой теоремы изложено, например, в [6]. Мы его здесь воспроизводить не будем. Отметим только, что оператор  $A$ , определенный равенством

$$Af(x) = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

называется *интегральным оператором с ядром  $K(x, \xi)$* .

Теорема 2 означает, что  $L^{-1}$  есть *интегральный оператор с ядром  $G(x, \xi)$* .



## Глава 3.

### ПРИЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В МЕХАНИКЕ

В этой главе рассмотрим некоторые приложения обобщенных функций в механике, в частности в сопротивлении материалов и теории изгиба тонких пластин. Это решение задачи изгиба балки с промежуточными упругими опорами, решение задачи изгиба балки ступенчато-переменной жесткости, а также решение аналогичной задачи теории изгиба тонких пластин ступенчато-переменной жесткости. Кроме того, проведем решение задач изгиба пластин, подкрепленных ребрами жесткости. Ребра жесткости могут быть расположены как вдоль одного направления (параллельно одной из сторон пластины), так и в двух взаимно перпендикулярных направлениях (перекрестная система ребер).

#### **1. Балка с промежуточными упругими опорами**

Сначала представим себе балку, лежащую на сплошном упругом основании, нагруженную некоторой внешней нагрузкой (рис. III.1.1). Балка изгибается и несколько вдавливаясь в основание, вследствие чего возникает реакция, распределенная по подошве балки – *упругий отпор*. Интенсивность упругого отпора в данной точке, отнесенную к единице длины балки, обозначим  $r$  (размерность – Н/м).

Заметим, что к схеме работы балки на упругом основании приводятся многие задачи расчета элементов конструкций (расчет шпал, рельсов, оболочечных конструкций, резервуаров, сопряжений трубопроводов и др.).

Для расчета балки, лежащей на упругом основании, очень важными являются упругие свойства основания. Рассмотрим распространенную модель деформирования основания, называемую *винклеровым основанием* (по имени

немецкого ученого Э. Винклера (1835–1888), одним из первых введшим ее в расчетную практику). Эта модель состоит в том, что реальное основание как бы заменяется бесконечным числом упругих, не связанных между собой пружин так, что реакция в каждой точке подошвы будет пропорциональна прогибу  $w$  в этой точке, равному осадке основания.

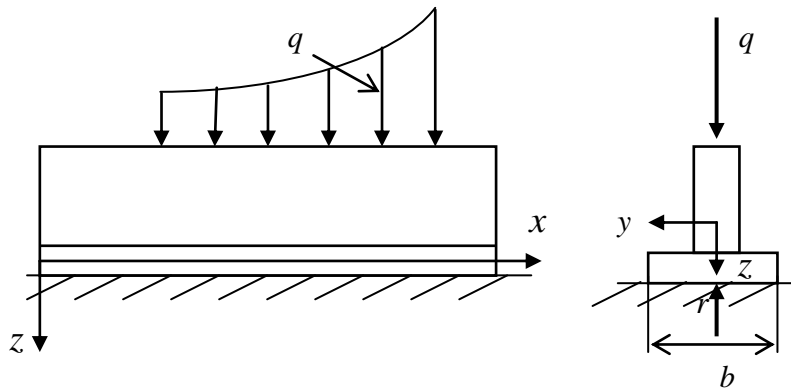


Рис. III.1.1

У подошвы балки шириной  $b$  выделим участок длиной, равной единице, и соберем с площади  $b \times 1$  суммарную реакцию, считая отпор распределенным по этой площади равномерно. Тогда реакцию на единицу длины балки можно представить в виде  $r = kbw$ , где  $k$  – коэффициент жесткости упругого основания (*коэффициент постели*). Экспериментально он определяется путем вдавливания в грунт жесткого штампа.

*Коэффициент постели  $k$  – это сила, необходимая для вдавливания в грунт штампа с площадью, равной единице, на прогиб  $w = 1$ ; размерность коэффициента  $k$  – Н/м<sup>3</sup>.*

Для примера приведем значения  $k$  для песчаного грунта различной плотности:

- песок рыхлый –  $k = 1,0 - 5,0$  МН/м<sup>3</sup>;
- песок утрамбованный –  $k = 10 - 100$  МН/м<sup>3</sup>;

- песок слежавшийся —  $k \leq 250 \text{ МН/м}^3$ .

На рис. III.1.1 изображена балка на винклеровом упругом основании. С учетом внешней нагрузки и упругого отпора суммарная интенсивность распределенной нагрузки в некоторой точке балки будет  $p = q - r = q - kb w$ .

Для получения дифференциального уравнения используем классическое уравнение изгиба балки

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q, \quad (\text{III.1.1})$$

в котором заданную поперечную нагрузку следует заменить суммарной распределенной нагрузкой  $p = q - r = q - kb w$ . Тогда из (III.1.1) следует уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + kb w = q. \quad (\text{III.1.2})$$

Если жесткость на изгиб постоянна, т. е.  $EJ_y = \text{const}$ , то уравнение (III.1.2) принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta^4 w = \frac{q}{EJ_y}, \quad (\text{III.1.3})$$

где  $\beta = \sqrt[4]{\frac{kb}{EJ_y}}$  (размерность —  $\text{м}^{-1}$ ).

Уравнение (III.1.1) представляет собой условие равновесия приходящихся на единицу длины балки сил, стремящихся вызвать и стремящихся не допустить возникновения прогибов в слабом (поперечном) направлении. Это уравнение является главным соотношением для классической теории балок.

Интегрированию уравнения (III.1.1) посвящена обширная литература, хотя с математической точки зрения вопрос представляется элементарным.

Вся трудность состоит в том, что правая часть обычно не является аналитической функцией от координаты  $x$ , выражение ее меняется от участка к участку. Поэтому при обычном способе интегрирования приходится на каждом участке вводить свои константы интегрирования и определять их из условий сопряжения.

Метод интегрирования уравнения (III.1.1), который будет рассмотрен, применялся еще О. Л. Коши; для изгиба балок он был детально разработан А. Н. Крыловым.

Отметим, что в курсах сопротивления материалов обычно изучается дифференциальное уравнение изгиба балки второго порядка

$$-EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} = M_x, \quad (\text{ш.1.4})$$

где  $M_x$  – изгибающий момент, действующий в поперечном сечении балки. Однако, как отмечал академик А. Н. Крылов [14], еще Пуассон показал преимущество уравнения (III.1.1) перед уравнением (1.4). Метод Пуассона не получил до сих пор в технике большого распространения, видимо, потому, что сам Пуассон рекомендовал разлагать предварительно функцию  $q(x)$  в тригонометрический ряд, затем производить четырехкратное повторное интегрирование и в заключение по граничным условиям определять константы интегрирования.

Главное достоинство метода Пуассона состоит в том, что при разрывной нагрузке нет необходимости подразделять балку на отдельные участки и составлять условия сопряжения для граничных точек отдельных участков. Однако разложение в ряды и затем суммирование их в подавляющем большинстве случаев вносит напрасное затруднение, от которого легко избавиться, написав общий интеграл уравнения (III.1.1) в виде

$$EJ_y w(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \int_0^x q(\xi) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi. \quad (\text{ш.1.5})$$

Общее решение уравнения (III.1.1) в форме (III.1.5) было дано еще Л. Эйлером в 1778 г. Оно легко может быть получено методом Лагранжа вариации произвольных постоянных. Заметим по поводу формулы (III.1.5), что функции  $1, x, x^2/2, x^3/6$  суть фундаментальные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (III.1.1), обладающие так называемой единичной матрицей в точке  $x = 0$ . А именно, если обозначить функции  $L(x) = 1, M(x) = x, N(x) = x^2/2, K(x) = x^3/6$ , то

$$\begin{bmatrix} L(x) & \frac{dL(x)}{dx} & \frac{d^2L(x)}{dx^2} & \frac{d^3L(x)}{dx^3} \\ M(x) & \frac{dM(x)}{dx} & \frac{d^2M(x)}{dx^2} & \frac{d^3M(x)}{dx^3} \\ N(x) & \frac{dN(x)}{dx} & \frac{d^2N(x)}{dx^2} & \frac{d^3N(x)}{dx^3} \\ K(x) & \frac{dK(x)}{dx} & \frac{d^2K(x)}{dx^2} & \frac{d^3K(x)}{dx^3} \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Представление общего интеграла основного уравнения изгиба балок в виде (III.1.5) вносит значительное упрощение в расчеты, придает единообразную форму этим расчетам, применимую во всех случаях, причем нет необходимости прибегать ни к теореме трех моментов, ни к началу наименьшей работы, когда имеет место многократная статическая неопределимость. Общий интеграл уравнения (III.1.1) состоит из общего интеграла соответствующего однородного уравнения

$$A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6}$$

и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения, которое запишем в виде

$$\Phi(x) = \int_0^x q(\xi) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi, \quad (\text{III.1.6})$$

так что будем иметь

$$EJ_y w(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \Phi(x).$$

Отметим, что *независимо* от вида функции  $q(x)$  имеют место равенства:  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) = 0$ ,  $\Phi''(0) = 0$ ,  $\Phi'''(0) = 0$ . Следовательно, каковы бы ни были условия закрепления балки на границе  $x = 0$ , функция  $\Phi(x)$  в эти условия входить не будет. Такое свойство позволяет составлять интеграл уравнения (III.1.1), удовлетворяющий условиям закрепления конца  $x = 0$  балки, причем в данном интеграле всегда будут содержаться только две произвольные постоянные. А именно,

когда конец  $x = 0$  подперт:

$$EJ_y w(x) = Bx + D \frac{x^3}{6} + \Phi(x),$$

когда конец  $x = 0$  заделан:

$$EJ_y w(x) = C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \Phi(x),$$

когда конец  $x = 0$  свободен:

$$EJ_y w(x) = A + Bx + \Phi(x).$$

Входящая в выражение (III.1.6) функция  $q(x)$  подчинена лишь одному требованию: она должна быть интегрируема, т. е. чтобы интеграл (III.1.6) имел вполне определенное конечное значение; таковым он будет для всех встречающихся на практике видов нагрузки.

Легко выписать функцию  $\Phi(x)$  для основных видов разрывных нагрузок, встречающихся при расчете балок на изгиб; таких видов нагрузки всего три: сосредоточенная сила, сосредоточенный изгибающий момент и распределенная нагрузка на части балки (не по всей длине балки).

В случае сосредоточенной силы  $P$ , действующей в точке с координатой  $x_0$ , интенсивность нагрузки определяется по формуле  $q(x) = P\delta(x - x_0)$  и, следовательно,

$$\Phi(x) = \int_0^x P\delta(\xi - x_0) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi = P \frac{(x - x_0)^3}{6} \theta(x - x_0),$$

где  $\delta(x - x_0)$  – дельта-функция Дирака,  $\theta(x - x_0)$  – единичная функция Хэвисайда.

В случае сосредоточенного момента  $M$ , действующего в точке с координатой  $x_0$ , интенсивность нагрузки определяется по формуле  $q(x) = M\delta'(x - x_0)$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^x M\delta'(\xi - x_0) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi = \int_0^x M\delta(\xi - x_0) \frac{(x - \xi)^2}{2} d\xi = \\ &= M \frac{(x - x_0)^2}{2} \theta(x - x_0), \end{aligned}$$

где  $\delta'(x - x_0)$  – производная дельта-функции Дирака.

И, наконец, в случае, когда на балку действует распределенная нагрузка  $f(x)$ , начало которой в точке с координатой  $x_1$ , а конец – в точке с координатой  $x_2$ , интенсивность ее рассчитывается по формуле

$$q(x) = f(x) [\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)],$$

и тогда

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^x f(\xi) (\theta(\xi - x_1) - \theta(\xi - x_2)) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi = \\ &= \int_{x_1}^x f(\xi) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi - \int_{x_2}^x f(\xi) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi. \end{aligned}$$

В частности, если  $q(x) = q = \text{const}$ , то

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^x q(\theta(\xi - x_1) - \theta(\xi - x_2)) \frac{(x - \xi)^3}{6} d\xi = \\ &= \frac{q(x - x_1)^4}{24} \theta(x - x_1) - \frac{q(x - x_2)^4}{24} \theta(x - x_2).\end{aligned}$$

### ПРИМЕЧАНИЕ

Точки  $x_0, x_1, x_2$  – внутренние точки отрезка  $[0, L]$ , где  $L$  – длина балки, причем  $x_1 < x_2$ .

**Балка с промежуточными упругими опорами.** Рассмотрим теперь балку, изображенную на рис. III.1.2. Балка имеет две неподвижные опоры на концах и две промежуточные упругие опоры (пружины), жесткости которых  $c_1$  и  $c_2$ .

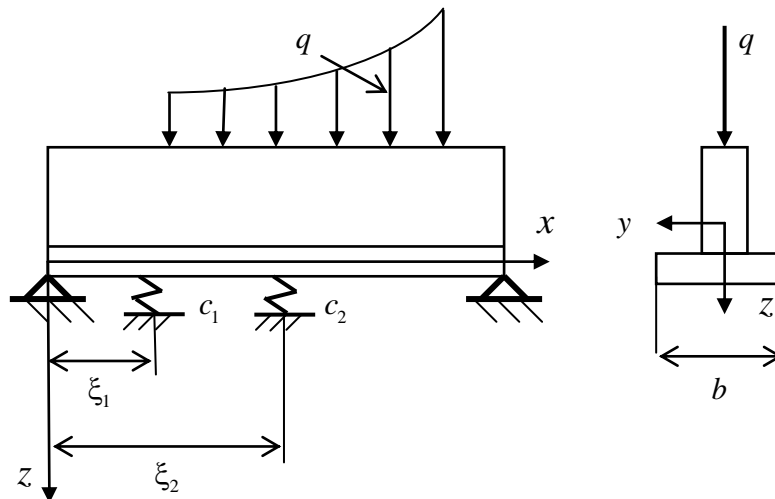


Рис. III.1.2

Уравнение изгиба такой балки с промежуточными упругими опорами можно записать по аналогии с уравнением (III.1.3), только теперь реальное основание заменяется не бесконечным числом упругих, не связанных между собой пружин, а конечным числом таких пружин. Пусть таких опор-пружин будет  $K$  штук, и расположены они будут соответственно в точках  $x = \xi_i, i = 1, 2, \dots, K$ . Тогда будем иметь вместо (III.1.3)



$$\frac{d^4}{dx^4} w(x) + \sum_{i=1}^K c_i w(\xi_i) \delta(x - \xi_i) = \frac{q(x)}{EJ_y}, \quad (\text{III.1.7})$$

где  $\delta(x - \xi_i)$  –  $\delta$ -функция, сосредоточенная в точке  $x = \xi_i$ .

Общее решение уравнения (III.1.7), согласно выше изложенному, можно записать в виде

$$w(x) = w_0 + w_1 x + w_2 \frac{x^2}{2} + w_3 \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{q(t)(x-t)^3}{6EJ_y} dt - \sum_{i=1}^K \frac{c_i \theta(x - \xi_i) w(\xi_i) (x - \xi_i)^3}{6EJ_y}. \quad (\text{III.1.8})$$

В формуле (1.8)  $w_0, w_1, w_2, w_3$  — начальные параметры, — соответственно значения функции, ее первой, второй и третьей производных в точке  $x = 0$ ;  $\theta(x - \xi_i)$  — функция Хэвисайда.

Приведем пример использования формулы (III.1.8) для расчета балок с промежуточными упругими опорами. Пусть это будет двутавровая балка № 20 – момент инерции  $J_y = 1840 \text{ см}^4$  или в системе СИ  $J_y = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ; модуль упругости материала (сталь)  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ; длина балки  $a = 6 \text{ м}$ ; поперечная нагрузка  $q = -5000 \text{ Н/м}$ . Балка на конце  $x = 0$  жестко закреплена, а на конце  $x = a$  – шарнирная опора. Имеется три промежуточных упругих опоры с координатами  $\xi_1 = 2 \text{ м}$ ,  $\xi_2 = 3,5 \text{ м}$ ,  $\xi_3 = 5 \text{ м}$ .

Решаем задачу в системе Maple. Поскольку функция Хэвисайда в точке  $x = 0$  не определена, доопределим ее значение в этой точке нулем с помощью оператора:

```
> NumericEventHandler(invalid_operation =
  `Heaviside/EventHandler`(value_at_zero = 0)):
```

Проверим:

```
> Heaviside(0); diff(Heaviside(x), x);
```

$$0$$

$$\text{Dirac}(x)$$

Видим, что  $\text{Heaviside}(0) = 0$ , кроме того, производная от функции Хэви-сайда, как и должно быть, есть  $\delta$ -функция Дирака.

Вводим исходные данные для расчета – длину балки, модуль Юнга, момент инерции, поперечную нагрузку, а также жесткости пружин и их координаты:

```
> a:=6.;E:=2e11;J:=1840/10^8;q:=-5000;
```

```
    a:=6.
```

$$E := 2 \cdot 10^{11}$$

$$J := \frac{23}{1250000}$$

```
    q := -5000
```

```
> K:=3;C:=array(1..K,[1e8,5e8,1e9]);
```

```
    xi:=array(1..K,[2.,3.5,5.]);
```

```
    K:=3
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^8 & 5 \cdot 10^8 & 1 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$

$$\xi := \begin{bmatrix} 2. & 3.5 & 5. \end{bmatrix}$$

Вычисляем частный интеграл уравнения (III.1.7)

```
> Int(q*(x-t)^3/6/E/J,t=0..x);wQ:=unapply(value(%),x);
```

$$\int_0^x (-0.0002264492753 (x-t)^3) dt$$

```
wQ:=x→-0.00005661231882x^4
```

Формируем общее решение уравнения (III.1.7) в случае, когда конец  $x = 0$  балки заземлен

```
> w:=proc(x) option operator,arrow;local k;
```

```
    w02*x^2/2+w03*x^3/3+wQ(x) -
```

```
    sum(Heaviside(x-xi[k])*C[k]*W[k]*(x-xi[k])^3/(6*E*J),
```

```
    'k' = 1 .. K)
```

```
end proc;
```

Формируем систему уравнений для выполнения граничных условий на конце  $x = a$  (шарнирное опирание) и условий совместности деформаций в точках  $x = \xi_i$

```
> w2:=diff(w(x),x$2):
e1:=w(a)=0;e2:=evalf(subs(x=a,w2))=0;
for j from 1 to K do
  e3[j]:=W[j]=w(xi[j]):
end do;
var:={}:eqn:={}:
eqn:=eqn union {e1} union {e2};
k:='k':
for k from 1 to K do
  eqn:=eqn union {e3[k]};
  var:=var union {W[k]};
end do:
var:=var union {w02,w03};
```

$$e1 := 18.00000000 w02 + 72.00000000 w03 - 0.07336956519 - 289.8550724 W_1 - 353.8269927 W_2 - 45.28985507 W_3 = 0$$

$$e2 := w02 + 12. w03 - 0.02445652173 - 108.6956522 \theta(4.) W_1 - 339.6739130 \theta(2.5) W_2 - 271.7391304 \theta(1.) W_3 = 0$$

$$e3_1 := W_1 = 2.000000000 w02 + 2.666666667 w03 - 0.0009057971011$$

$$e3_2 := W_2 = 6.125000000 w02 + 14.29166667 w03 - 0.008495386093 - 15.28532609 W_1$$

$$e3_3 := W_3 = 12.50000000 w02$$

$$+ 41.66666667 w03 - 0.03538269926$$

$$- 122.2826087 W_1 - 76.42663043 W_2$$

$$eqn := \{w02 + 12. w03 - 0.02445652173$$

$$- 108.6956522 W_1 - 339.6739130 W_2$$

$$- 271.7391304 W_3 = 0, 18.00000000 w02$$

$$+ 72.00000000 w03 - 0.07336956519$$

$$- 289.8550724 W_1 - 353.8269927 W_2$$

$$- 45.28985507 W_3 = 0\}$$

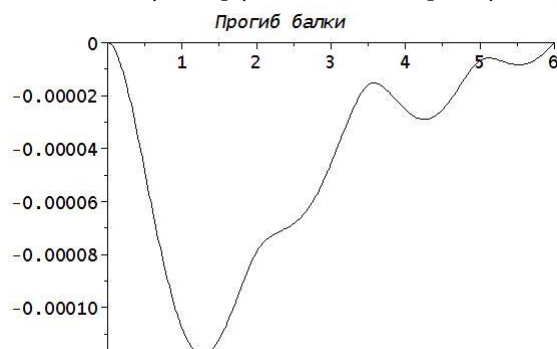
$$var := \{w02, w03, W_1, W_2, W_3\}$$

Решаем полученную систему:

```
> res:=fsolve (eqn, var) ; assign (res) :
res := {w02 = -0.0006187162315, w03
= 0.0007741365063, W_1 =
-0.0000788655472, W_2 =
-0.00001583650052, W_3 =
-0.0000067491631}
```

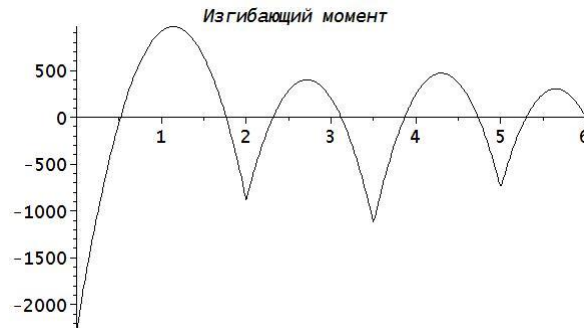
Строим графики (эпюры) прогиба

```
> k:='k':
plot (w(x), x=0..a, title='Прогиб балки', color=black,
font=[Courier, roman, 14], labels=["", ""]);
```



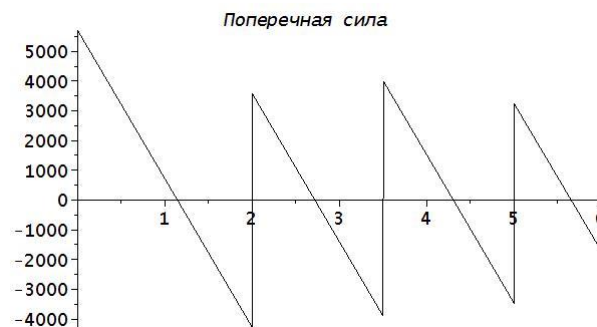
изгибающего момента

```
> M:=E*J*diff(w(x),x$2):
> plot(M,x=0..a,title=`Изгибающий момент`,color=black,
font=[Courier,roman,14],labels=["",""]);
```



и поперечной (перерезывающей) силы

```
> Q:=E*J*diff(w(x),x$3):plot(Q,x=0..a,
title=`Поперечная сила`,color=black,
font=[Courier,roman,14],labels=["",""]);
```



## 2. Изгиб балки ступенчато-переменной жесткости

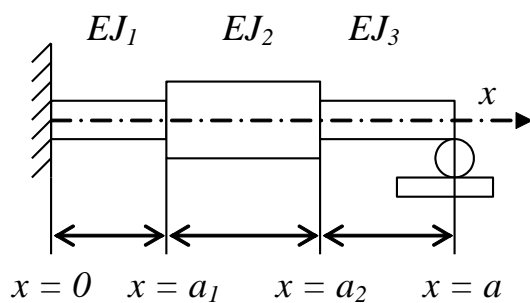


Рис. III.2.1

Обычно [7], при определении деформации ступенчатой балки (рис. III.2.1), необходимо записать дифференциальное уравнение изгиба для каждой из ступеней, изгибные жесткости поперечных сечений которых соответственно равны  $EJ_1, EJ_2, EJ_3, \dots$ :

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ_1}, \quad \frac{d^4 w_2}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ_2}, \quad \frac{d^4 w_3}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ_3}, \quad \dots \quad (\text{III.2.1})$$

Затем каждое из перечисленных уравнений необходимо проинтегрировать в своей области, в пределах которой жесткость балки остается неизменной. В результате будем иметь  $K + 1$  (где  $K$  – количество скачков жесткости) функций  $w_i(x)$ , каждая из которых описывает прогиб балки на соответствующем участке с жесткостью  $EJ_i$ . Эти функции будут содержать  $4K + 4$  произвольных постоянных интегрирования, которые определяются из граничных условий (по два условия на каждом конце балки, в частности, при  $x = 0$  и  $x = a$ ) и условий сопряжения на стыках участков в сечениях, где жесткость балки меняется скачком (например, при  $x = a_1, x = a_2$ ). Таким образом, решение задачи получается «склеивкой» решений на отдельных участках.

Ниже предлагается другой метод решения задачи, основанный на использовании обобщенных функций – дельта-функции Дирака  $\delta(x)$ , функции единичного скачка Хэвисайда  $\theta(x)$  и их производных. Данный метод легко обобщается и на более сложные задачи, связанные с расчетом пластин и оболочек.

Запишем изгибную жесткость балки единым выражением

$$EJ(x) = EJ_1 + \sum_{k=1}^K (EJ_{k+1} - EJ_k) \theta(x - a_k). \quad (\text{III.2.2})$$

Дифференциальное уравнение изгиба балки переменной жесткости, очевидно, имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x) \quad (\text{III.2.3})$$

Подставим выражение (III.2.2) в уравнение (III.2.3) и выполним дифференцирование. Получим следующее уравнение изгиба балок ступенчато переменной жесткости

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \sum_{k=1}^K \frac{(J_{k+1} - J_k)}{J_k} \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=a_k} \delta(x - a_k) + \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=a_k} \delta'(x - a_k) \right] = \frac{q(x)}{EJ(x)}. \quad (\text{III.2.4})$$

При записи уравнения (III.2.4) воспользуемся фильтрующим свойством первой производной дельта-функции:

$$a(x)\delta'(x - \xi) = a(\xi)\delta'(x - \xi) - a'(\xi)\delta(x - \xi).$$

Построим общее решение уравнения (III.2.4) методом Стеклова-Фубини. Для этого перепишем уравнение (III.2.4) так

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ(x)} - \sum_{k=1}^K \frac{(J_{k+1} - J_k)}{J_k} \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=a_k} \delta(x - a_k) + \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=a_k} \delta'(x - a_k) \right]; \quad (\text{III.2.5})$$

затем будем рассматривать правую часть уравнения (III.2.5) как известную функцию и построим решение этого уравнения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных. Не останавливаясь на несложных преобразованиях, приведем окончательную формулу общего решения уравнения (III.2.5)

$$w(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 + w_q^*(x) - \sum_{k=1}^K \frac{(J_{k+1} - J_k)}{J_k} \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=a_k} \psi_k^*(x) + \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=a_k} \psi_k^{*\prime}(x) \right]; \quad (\text{III.2.6})$$

где  $w_q^*(x)$  — частное решение уравнения

$$\frac{d^4 w_q^*}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ(x)}, \quad (\text{III.2.7})$$

а функции  $\psi_k^*(x)$  и  $\psi_k^{*\prime}(x)$  определяются по формулам

$$\psi_k^*(x) = \frac{(x-a_k)^3}{6} \theta(x-a_k), \quad \psi_k^{*'}(x) = \frac{(x-a_k)^2}{2} \theta(x-a_k) \quad (\text{III.2.8})$$

и являются частными решениями уравнений

$$\frac{d^4 \psi_k^*}{dx^4} = \delta(x-a_k), \quad \frac{d^4 \psi_k^{*'}}{dx^4} = \delta'(x-a_k). \quad (\text{III.2.9})$$

Частное решение  $w_q^*(x)$  удобно вычислять по формуле

$$w_q^*(x) = \int_0^x \frac{q(t)}{EJ(t)} \frac{(x-t)^3}{6} dt. \quad (2.10)$$

Общее решение уравнения (III.2.5) содержит  $2K + 4$  неизвестных константы:  $C_i$ ,  $w'''(a_k)$ ,  $w''(a_k)$ ,  $i=1,2,3,4$ ;  $k=1,2,\dots,K$ . Эти константы определяются из граничных условий при  $x = 0$  и  $x = a$  и условий на скачках при  $x = a_k$ . Отметим, что общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (III.2.5) и входящее в решение (III.2.6), обладает так называемой единичной матрицей при  $x = 0$ . Это означает, что две из четырех констант  $C_i$  всегда будут равны нулю (конечно, если рассматриваются классические условия – жесткое защемление, шарнир или свободный край). Таким образом, всего неизвестных, подлежащих определению, будет  $2K + 2$ . Выпишем явно систему уравнений для вычисления указанных констант. Пусть, для конкретности, конец балки  $x = 0$  будет жестко защемлен, а другой конец  $x = a$  имеет шарнирную опору, как показано на рис. III.2.1. В этом случае  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 0$ ; для определения остальных констант будем иметь ( $j = 1,2,\dots,K$ )

$$w''(a_j) = \frac{J_j}{J_{j+1}} \left\{ C_1 x_j + C_2 + w_q^{*''}(x_j) - \sum_{k=1}^K \frac{(J_{k+1} - J_k)}{J_k} \left[ w'''(a_k) \psi_k^{*(2)}(x_j) + w''(a_k) \psi_k^{*(3)}(x_j) \right] \right\}, \quad (\text{III.2.11})$$



$$w^{(3)}(a_j) = \frac{J_j}{J_{j+1}} \left\{ C_1 + w_q^{*(3)}(x_j) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^K \frac{(J_{k+1} - J_k)}{J_k} [w'''(a_k) \psi_k^{*(3)}(x_j) + w''(a_k) \psi_k^{*(4)}(x_j)] \right\}, \quad (\text{III.2.12})$$

$$0 = C_1 \frac{a^3}{6} + C_2 \frac{a^2}{2} - \\ - \sum_{k=1}^K \frac{(J_{k+1} - J_k)}{J_k} \left[ w'''(a_k) \psi_k^*(a) + w''(a_k) \psi_k'^*(a) \right], \quad (\text{III.2.13})$$

$$0 = C_1 a + C_2 + w_q^{*''}(a) - \\ - \sum_{k=1}^K \frac{(J_{k+1} - J_k)}{J_k} [w'''(a_k) \psi_k^{*(2)}(a) + w''(a_k) \psi_k^{*(3)}(a)]. \quad (\text{III.2.14})$$

Таким образом, решение задачи изгиба балки ступенчато переменной жесткости полностью определяется формулой (III.2.6), в которой константы – суть решения системы уравнений (III.2.11)–(III.2.14). Формула (III.2.6) дает решение задачи сразу во всей области.

### **3. Изгиб прямоугольной пластины ступенчато-переменной толщины**

Рассмотрим изгиб прямоугольной пластины, толщина которой имеет ступенчатую форму, как показано на рис. III.3.1. Часто такая форма пластины используется в качестве водоудерживающей обшивки в конструкциях плоских стальных затворов гидротехнических сооружений.

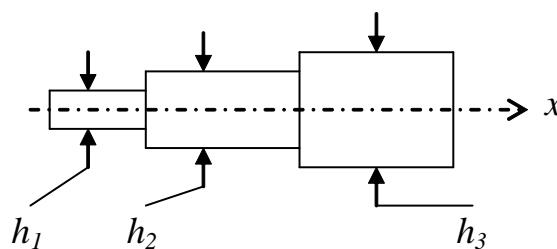


Рис. 3.1.

Пусть толщина пластины изменяется ступенчато в направлении оси  $x$ . Тогда можно записать

$$h(x) = h_1 + \sum_{k=1}^K (h_{k+1} - h_k) \theta(x - a_k^*), \quad (\text{III.3.1})$$

где  $h_k$  – толщины ступеней;  $a_k^*$  – координаты скачков;  $K$  – количество скачков.

Уравнение изгиба пластины с переменной толщиной имеет вид

$$D \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q(x, y). \quad (\text{III.3.2})$$

Удобно записать цилиндрическую жесткость пластины со ступенчатой толщиной в форме, аналогичной (III.3.1), т. е.

$$D(x) = D_1 + \sum_{k=1}^K (D_{k+1} - D_k) \theta(x - a_k^*). \quad (\text{III.3.3})$$

Тогда производные цилиндрической жесткости вычисляются по формулам

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = 0, \quad D_k = \frac{E h_k^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (\text{III.3.4})$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \sum_{k=1}^K (D_{k+1} - D_k) \delta(x - a_k^*), \quad \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^K (D_{k+1} - D_k) \delta'(x - a_k^*). \quad (\text{III.3.5})$$

С учетом формул (III.3.4) и (III.3.5) уравнение (III.3.2) переписывается в виде

$$\nabla^4 w + \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \delta(x - a_k^*) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta'(x - a_k^*) \right\} = \frac{q(x, y)}{D(x)}. \quad (\text{III.3.6})$$

При записи уравнения (III.3.6) слагаемые, содержащие производные от  $\delta$ -функции, преобразованы по формуле

$$a(x)\delta'(x-\xi) = a(\xi)\delta'(x-\xi) - a'(\xi)\delta(x-\xi).$$

В качестве граничных условий будем предполагать для определенности, что кромки пластины  $y = 0, b$  шарнирно оперты, а две другие кромки  $x = 0, a$  – свободны.

Будем искать решение задачи в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nx}(x) \sin(\beta_n y), \quad w_{nx}(x) = \frac{2}{a} \int_0^a w(x, y) \sin(\beta_n y) dy, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}. \quad (\text{III.3.7})$$

Функцию заданной нагрузки также представим рядом

$$\frac{q(x, y)}{D(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \sin(\beta_n y), \quad p_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{q(x, y)}{D(x)} \sin(\beta_n y) dy. \quad (\text{III.3.8})$$

Подставим теперь формулы (III.3.7), (III.3.8) в уравнение (III.3.6), умножим полученное уравнение на  $\frac{2}{b} \sin(\beta_n y)$  и проинтегрируем по  $y$  в пределах от  $y = 0$  до  $y = b$ . Для каждого  $n = 1, 2, 3, \dots$  находим

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta_n}^4 w_n(x) + \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu)\beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] \delta(x - a_k^*) + \right. \\ \left. + \left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu\beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right] \delta'(x - a_k^*) \right\} = p_n(x), \quad (\text{III.3.9}) \end{aligned}$$

где  $\nabla_{\beta_n}^4$  – обыкновенный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$\nabla_{\beta_n}^4 = \frac{d^4}{dx^4} - 2\beta_n^2 \frac{d^2}{dx^2} + \beta_n^4. \quad (\text{III.3.10})$$

Для решения уравнения (III.3.9) воспользуемся методом Стеклова–

Фубини [9, 10], а именно, перепишем это уравнение следующим образом

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta_n}^4 w_{nx}(x) = p_n(x) - \\ - \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu)\beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] \delta(x - a_k^*) + \right. \\ \left. + \left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu\beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right] \delta'(x - a_k^*) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.11})$$

Запишем теперь общее решение уравнения (III.3.11)

$$\begin{aligned} w_{nx}(x) = w_{nx}(0)L_{\beta_n}(x) + w_{nx}'(0)M_{\beta_n}(x) + w_{nx}''(0)N_{\beta_n}(x) + w_{nx}'''(0)K_{\beta_n}(x) + \\ + w_{nx}^0(x) - \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu)\beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] \Psi_{k\beta_n}^*(x) + \right. \\ \left. + \left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu\beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right] \Psi_{k\beta_n}^{*\prime}(x) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

где введены обозначения

$$\Psi_{k\beta_n}^*(x) = K_{\beta_n}(x - a_k^*)\theta(x - a_k^*), \quad K_{\beta_n}(x) = \frac{1}{2\beta_n^3} [\beta_n x \operatorname{ch}(\beta_n x) - \operatorname{sh}(\beta_n x)],$$

$$\Psi_{k\beta_n}^{*\prime}(x) = K_{\beta_n}'(x - a_k^*)\theta(x - a_k^*), \quad L_{\beta_n}(x) = \operatorname{ch}(\beta_n x) - \frac{1}{2}\beta_n x \operatorname{sh}(\beta_n x),$$

$$M_{\beta_n}(x) = \frac{1}{2\beta_n} [3 \operatorname{sh}(\beta_n x) - \beta_n x \operatorname{ch}(\beta_n x)], \quad N_{\beta_n}(x) = \frac{x \operatorname{sh}[\beta_n x]}{2\beta_n}, \quad (\text{III.3.13})$$

$w_{nx}^0(x)$  — частное решение уравнения  $\nabla_{\beta_n}^4 w_{nx}^0(x) = p_n(x)$ . Решение (III.3.12)

удобно взять в виде

$$w_{nx}^0(x) = \int_0^x \frac{p_n(t)}{D(t)} K_{\beta_n}(x - t) dt. \quad (\text{III.3.14})$$

Выписанное решение автоматически удовлетворяет условиям шарнирного закрепления кромок  $y = 0, b$ . Константы  $w_{nx}(0)$ ,  $w_{nx}'(0)$ ,  $w_{nx}''(0)$  и  $w_{nx}'''(0)$

легко находятся из граничных условий при  $x = 0$ ,  $a$  (две из них всегда равны нулю, например, в случае свободных кромок  $w_{nx}''(0) = 0$  и  $w_{nx}'''(0) = 0$ ). Эти константы можно определять из общей системы алгебраических уравнений вместе с константами

$$\left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu \beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right]$$

и

$$\left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu) \beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] .$$

Выпишем явно эту систему. Для этого введем в рассмотрение операторы

$$R_{1\beta_n} w_{nx}(x) = \left[ w_{nx}''(x) - \nu \beta_n^2 w_{nx}(x) \right],$$

$$R_{2\beta_n} w_{nx}(x) = \left[ w_{nx}'''(x) - (2 - \nu) \beta_n^2 w_{nx}'(x) \right] . \quad (\text{Ш.3.15})$$

Поддействуем теперь операторами (Ш.3.15) на функцию (Ш.3.12) и положим  $x = x_j, j = 1, 2, \dots, K$ . Получим следующую систему ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \frac{D_{j+1}}{D_j} R_{1\beta_n} w_{nx}(x_j) + \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu) \beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] R_{1\beta_n} \psi_{k\beta_n}^*(x_j) + \right. \\ \left. + \left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu \beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right] R_{1\beta_n} \psi_{k\beta_n}^{*'}(x_j) \right\} + \\ + w_{nx}(0) R_{1\beta_n} L_{\beta_n}(x_j) + w_{nx}'(0) R_{1\beta_n} M_{\beta_n}(x_j) = R_{1\beta_n} \overset{0}{w}_{nx}(x_j), \quad (\text{Ш.3.16}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{j+1}}{D_j} R_{2\beta_n} w_{nx}(x_j) + \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu) \beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] R_{2\beta_n} \psi_{k\beta_n}^*(x_j) + \right. \\ \left. + \left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu \beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right] R_{2\beta_n} \psi_{k\beta_n}^{*'}(x_j) \right\} + \\ + w_{nx}(0) R_{2\beta_n} L_{\beta_n}(x_j) + w_{nx}'(0) R_{2\beta_n} M_{\beta_n}(x_j) = R_{2\beta_n} \overset{0}{w}_{nx}(x_j). \quad (\text{Ш.3.17}) \end{aligned}$$

Кроме того, на свободных кромках при  $x = a$  для каждого  $n$  будем иметь

еще два уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu)\beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] R_{1\beta_n} \Psi_{k\beta_n}^*(a) + \right. \\ & \quad \left. + \left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu\beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right] R_{1\beta_n} \Psi_{k\beta_n}^{*'}(a) \right\} + \\ & \quad + w_{nx}(0) R_{1\beta_n} L_{\beta_n}(a) + w_{nx}'(0) R_{1\beta_n} M_{\beta_n}(a) = R_{1\beta_n}^0 w_{nx}(a), \quad (\text{Ш.3.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left\{ \left[ w_{nx}'''(a_k^*) - (2 - \nu)\beta_n^2 w_{nx}'(a_k^*) \right] R_{2\beta_n} \Psi_{k\beta_n}^*(a) + \right. \\ & \quad \left. + \left[ w_{nx}''(a_k^*) - \nu\beta_n^2 w_{nx}(a_k^*) \right] R_{2\beta_n} \Psi_{k\beta_n}^{*'}(a) \right\} + \\ & \quad + w_{nx}(0) R_{2\beta_n} L_{\beta_n}(a) + w_{nx}'(0) R_{2\beta_n} M_{\beta_n}(a) = R_{2\beta_n}^0 w_{nx}(a). \quad (\text{Ш.3.19}) \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи полностью определяется формулами (Ш.3.7), (Ш.3.8), (Ш.3.12)–(Ш.3.14), в которых числовые константы находятся из системы алгебраических уравнений (Ш.3.16)–(Ш.3.19).

#### **4. Изгиб ребристых прямоугольных пластин**

Рассмотрим простейшую задачу теории изгиба подкрепленных пластин, имеющую тем не менее важное практическое значение. Построим точное решение задачи, которое естественным образом распространяется и на более сложные задачи, являющиеся хорошими моделями плоских стальных тонкостенных конструкций нерегулярной структуры.

Пусть прямоугольная пластина ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) нагружена поперечной нагрузкой  $q(x,y)$  и подкреплена рёбрами, расположенными параллельно оси  $y$  по линиям  $x = x_j = \text{const}$ ,  $j = 1, \dots, K_2$ . Будем учитывать только изгибные жесткости ребер, которые считаем постоянными. Так как кривизны для пла-

стины равны нулю ( $k_1 = 0, k_2 = 0$ ) то будем иметь только одно разрешающее уравнение относительно функции прогиба  $w(x,y)$ , которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} - \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - x_j) \quad \lambda_{2j} = \frac{E_{2j} J_{2j}}{D}, \quad j = 1, 2, \dots, K_2. \quad (\text{Ш.4.1})$$

Граничные условия могут быть любыми. Простейшими, но важными с точки зрения практических приложений, являются условия шарнирного закрепления пластины по всему контуру, имеющие вид

при  $x = 0, x = a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (\text{Ш.4.2})$$

при  $y = 0, y = b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{Ш.4.3})$$

Решение задачи (Ш.4.1)–(Ш.4.3) будем искать в форме

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x) \sin(\beta_m y), \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad (\text{Ш.4.4})$$

где коэффициенты Фурье

$$w_m(x) = \frac{2}{b} \int_0^b w(x, y) \sin(\beta_m y) dy. \quad (\text{Ш.4.5})$$

Для получения уравнения относительно трансформанты Фурье  $w_m(x)$  умножаем уравнение (Ш.4.1) на функцию  $\frac{2}{b} \sin(\beta_m y)$  и интегрируем по  $y$  от 0 до  $b$ ; будем иметь для любого  $m = 1, 2, \dots, \infty$

$$\nabla_{\beta_m}^4 w_m(x) = \frac{q_m(x)}{D} - \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m(x) \delta(x - x_j), \quad (\text{Ш.4.6})$$

где  $q_m(x)$  – коэффициенты Фурье разложения функции  $q(x,y)$  в тригонометрический ряд по системе функций  $\{\sin(\beta_m y)\}$  на отрезке  $[0, b]$ , т. е.

$$q_m(x) = \frac{2}{b} \int_0^b q(x,y) \sin(\beta_m y) dy; \quad (\text{III.4.7})$$

$\nabla_{\beta_m}^4$  – обыкновенный дифференциальный оператор четвёртого порядка с постоянными коэффициентами

$$\nabla_{\beta_m}^4 = \frac{d^4}{dx^4} - 2\beta_m^2 \frac{d^2}{dx^2} + \beta_m^4. \quad (\text{III.4.8})$$

Общее решение уравнения (III.4.6) можно представить в виде суммы трёх слагаемых – решения  $\overset{0}{w}_m(x)$  однородного уравнения

$$\nabla_{\beta_m}^4 \overset{0}{w}_m(x) = 0, \quad (\text{III.4.9})$$

какого-нибудь частного решения  $\overset{0}{w}_m^*(x)$  уравнения

$$\nabla_{\beta_m}^4 \overset{0}{w}_m^*(x) = \frac{q_m(x)}{D} \quad (\text{III.4.10})$$

и какого-нибудь частного решения  $w_m^*(x)$  уравнения

$$\nabla_{\beta_m}^4 w_m^*(x) = \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m(x) \delta(x - x_j). \quad (\text{III.4.11})$$

Можно записать

$$w_m(x) = \sum_{k=1}^4 C_k Z_{\beta_m k}(x) + \overset{0}{w}_m^*(x) - \sum_{j=1}^{K_2} \theta(x - x_j) \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m(x_j) \Delta(x - x_j), \quad (\text{III.4.12})$$

где  $\{Z_{\beta_m k}(x)\}$  – фундаментальная система решений однородного уравнения



(Ш.4.9), которую можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} Z_{\beta_m 1}(x) &= \operatorname{sh}(\beta_m x), & Z_{\beta_m 2}(x) &= \beta_m x \operatorname{ch}(\beta_m x), \\ Z_{\beta_m 3}(x) &= \operatorname{ch}(\beta_m x), & Z_{\beta_m 4}(x) &= \beta_m x \operatorname{sh}(\beta_m x); \end{aligned} \quad (\text{Ш.4.13})$$

$C_k$  – произвольные постоянные интегрирования;

$$\Delta(x - x_j) = \frac{1}{2\beta_m^3} \left\{ \beta_m (x - x_j) \operatorname{ch} \beta_m (x - x_j) - \operatorname{sh} \beta_m (x - x_j) \right\}. \quad (\text{Ш.4.14})$$

Отметим, что при практической реализации решения удобнее использовать фундаментальные решения однородного уравнения, обладающие единичной матрицей при  $x = 0$ .

Будем рассматривать три основных вида поперечной нагрузки  $q(x,y)$ , как наиболее часто встречающихся при расчетах конструкций:

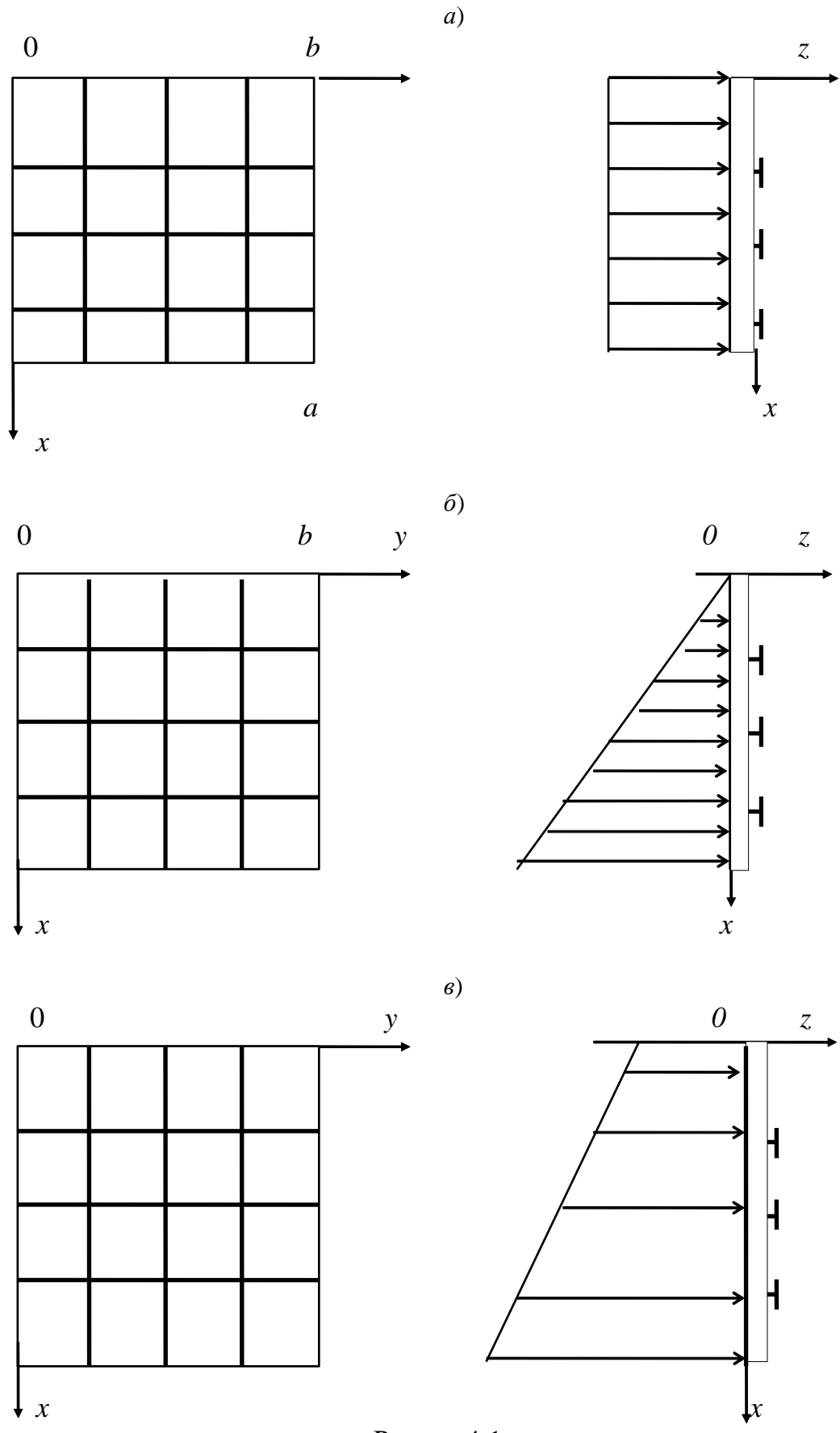


Рис. III.4.1

равномерно распределённая нагрузка (рис. Ш.4.1, а)

$$q(x, y) = p_0 = q_0 \frac{l}{a} = \text{const}; \quad (\text{Ш.4.15})$$

линейная «треугольная» нагрузка (рис. Ш.4.1, б)

$$q(x, y) = q_0 \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a; \quad (\text{Ш.4.16})$$

линейная «трапецеидальная» нагрузка (рис. Ш.4.1, в)

$$q(x, y) = q_0 \frac{x+l}{a}, \quad 0 \leq x \leq a; \quad (\text{Ш.4.17})$$

где, в частности, в случае гидростатической нагрузки,  $q_0 = \rho g a$ ,  $\rho$  – плотность воды,  $g$  – ускорение свободного падения,  $a$  – высота вертикально расположенной пластины (обшивки борта судна или затвора гидротехнических сооружений),  $l$  – глубина верхнего края этой пластины.

Рассматриваемая задача является хорошей расчетной моделью плоского стального затвора гидротехнических сооружений (ригельного либо стоечного типа). Нагрузки (Ш.4.15) и (Ш.4.17) возникают в случае глубинного затвора, нагрузка (Ш.4.16) – в случае поверхностного затвора. Возможны и другие виды поперечной нагрузки; их изучение полностью аналогично предложенным выше трем случаям.

Коэффициенты Фурье нагрузок (Ш.4.15)–(Ш.4.17):

равномерно распределенная нагрузка

$$q_m(x) = \frac{2q_0 l}{m\pi a} [1 - (-1)^m], \quad \forall m \Rightarrow$$
$$q_m(x) = \frac{4q_0 l}{m\pi a}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad (\text{Ш.4.18})$$

линейная «треугольная» нагрузка

$$q_m(x) = \frac{2q_0x}{m\pi a} [1 - (-1)^m], \quad \forall m \Rightarrow$$

$$q_m(x) = \frac{4q_0x}{m\pi a}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad (\text{Ш.4.19})$$

линейная «трапецеидальная» нагрузка

$$q_m(x) = \frac{2q_0(x+l)}{m\pi a} [1 - (-1)^m], \quad \forall m \Rightarrow$$

$$q_m(x) = \frac{4q_0(x+l)}{m\pi a}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{Ш.4.20})$$

Соответствующие частные решения  $w_m^*(x)$ :

равномерно распределенная нагрузка

$$w_m^*(x) = \frac{4q_0l}{baD\beta_m^5}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad (\text{Ш.4.21})$$

линейная «треугольная» нагрузка

$$w_m^*(x) = \frac{4q_0x}{baD\beta_m^5}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad (\text{Ш.4.22})$$

линейная «трапецеидальная» нагрузка

$$w_m^*(x) = \frac{4q_0(x+l)}{baD\beta_m^5}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{Ш.4.23})$$

Принятая форма решения (Ш.4.4) автоматически удовлетворяет граничным условиям (Ш.4.3). Для удовлетворения условиям (Ш.4.2) имеем четыре произвольных постоянных  $C_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) в выражении (Ш.4.12) для  $w_m(x)$ .

Подстановка (Ш.4.4) в (Ш.4.2) с учётом формулы (Ш.4.12) и выражений или (Ш.4.21), или (Ш.4.22) или (Ш.4.23) приводит к системе алгебраических линейных уравнений относительно  $C_k$ , которая легко решается. Не останавли-

ваясь на элементарных вычислениях, приведем окончательный результат

$$w_m(x) = w_m^0(x) + w_m^0(x) - w_m^*(x), \quad (\text{III.4.24})$$

где

$$w_m^*(x) = \sum_{j=1}^{K_2} w_m(x_j) \Psi_{j\beta_m}^0(x), \quad (\text{III.4.25})$$

$$\begin{aligned} \Psi_{j\beta_m}^0(x) = & \frac{\lambda_{2j}\beta_m}{2} \left\{ \left[ \frac{\text{sh } \beta_m x}{\text{sh } \beta_m a} \text{sh } \beta_m (a - x_j) - \theta(x - x_j) \text{sh } \beta_m (x - x_j) \right] + \right. \\ & + \frac{\text{sh } \beta_m (a - x_j)}{\text{sh } \beta_m a} \left[ \frac{\text{sh } \beta_m x}{\text{sh } \beta_m a} \beta_m a \text{ch } \beta_m a - \beta_m x \text{ch } \beta_m x \right] + \\ & \left. + \left[ \beta_m (x - x_j) \text{ch } \beta_m (x - x_j) \theta(x - x_j) - \beta_m (a - x_j) \text{ch } \beta_m (a - x_j) \frac{\text{sh } \beta_m x}{\text{sh } \beta_m a} \right] \right\}. \quad (\text{III.4.26}) \end{aligned}$$

Для случая линейной «треугольной» нагрузки

$$\begin{aligned} w_m^0(x) = & \frac{2q_0}{b\beta_m^5 D \text{sh } \beta_m a} \left[ \beta_m x \text{ch } \beta_m x - \frac{(2 \text{sh } \beta_m a + \beta_m a \text{ch } \beta_m a)}{\text{sh } \beta_m a} \text{sh } \beta_m x \right], \\ m = & 1, 3, 5, \dots; \quad (\text{III.4.27}) \end{aligned}$$

в случае равномерно распределенной нагрузки

$$\begin{aligned} w_m^0(x) = & \frac{4q_0 l}{ba\beta_m^5 D} \left[ \frac{(\text{ch } \beta_m a - 1)(2 \text{sh } \beta_m a - \beta_m a)}{2 \text{sh}^2 \beta_m a} \text{sh } \beta_m x - \right. \\ & \left. - \frac{(\text{ch } \beta_m a - 1)}{2 \text{sh } \beta_m a} \beta_m x \text{ch } \beta_m x - \text{ch } \beta_m x + \frac{\beta_m x}{2} \text{sh } \beta_m x \right], \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad (\text{III.4.28}) \end{aligned}$$

и, наконец, в случае линейной «трапецеидальной» нагрузки – сумма решений, даваемых формулами (III.4.27) и (III.4.28).

Решение (III.4.24) содержит неизвестные пока числовые коэффициенты – значения коэффициентов Фурье решения в точках  $x = x_j$ ,  $j = 1, \dots, K_2$ . Для

определения этих коэффициентов подставим значения  $x = x_j$  в формулы (Ш.4.24); получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $w_m(x_i)$

$$w_m(x_i) = w_m^0(x_i) + w_m^*(x_i) - \sum_{j=1}^{K_2} w_m(x_j) \Psi_{j\beta_m}^0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, K_1. \quad (\text{Ш.4.29})$$

Итак, решение задачи изгиба прямоугольной пластины, подкрепленной ребрами жесткости параллельно одной из сторон, дается формулами (Ш.4.24), в которых числовые коэффициенты  $w_m(x_i)$  определяются из системы (Ш.4.29). Если пластина подкреплена в другом направлении (ребра расположены параллельно оси  $x$  по линиям  $y = y_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K_1$ ), то решение задачи даётся также формулами (Ш.4.4), (Ш.4.5), (Ш.4.12), (Ш.4.24)–(Ш.4.29), в которых следует заменить  $x \leftrightarrow y$ ,  $b \rightarrow a$ ,  $\beta_m \rightarrow \alpha_m = m\pi/a$ ,  $j \rightarrow i$ ,  $K_2 \rightarrow K_1$ . При этом следует иметь в виду, что частное решение  $w_m^*(y)$  будет вычисляться по иным, отличным от (Ш.4.21)–(Ш.4.23), формулам, так как по другим формулам рассчитывается  $q_m(x)$ . В случае гидростатической нагрузки типа (Ш.4.15)–(Ш.4.17) будем иметь:

для равномерно распределенной нагрузки

$$q(x, y) = q_0 \frac{l}{a}, \quad q_m(y) = \frac{4q_0 l}{\alpha_m a^2}, \quad w_m^*(y) = \frac{4q_0 l}{\alpha_m^5 D a^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots); \quad (\text{Ш.4.30})$$

для линейной «треугольной» нагрузки

$$q(x, y) = q_0 \frac{x}{a}, \quad q_m(y) = \frac{2q_0}{\alpha_m a},$$

$$w_m^*(y) = \frac{2q_0}{\alpha_m^5 D a} \quad (m = 1, 3, 5, \dots); \quad (\text{Ш.4.31})$$

для линейной «трапецеидальной» нагрузки

$$q(x, y) = q_0 \frac{x+l}{a}, \quad q_m(y) = \frac{2q_0(2a+l)}{\alpha_m a^2},$$

$${}^0 w_m^*(y) = \frac{2q_0(2a+l)}{\alpha_m^5 D a^2} \quad (m=1,3,5,\dots). \quad (\text{Ш.4.32})$$

Решение, соответствующее однородному уравнению, в данном случае дается одной формулой

$${}^0 w_m(y) = \frac{q_m}{\alpha_m^4 D} \left\{ 1 + \frac{(\text{ch } \alpha_m b - 1)(2 \text{sh } \alpha_m b - \alpha_m b)}{2 \text{sh}^2 \alpha_m b} \text{sh } \alpha_m y - \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{(\text{ch } \alpha_m b - 1)}{2 \text{sh } \alpha_m b} y \alpha_m - 1 \right] \text{ch } \alpha_m y + \frac{y \alpha_m}{2} \text{sh } \alpha_m y \right\}, \quad (\text{Ш.4.33})$$

где  $q_m$  – одна из нагрузок (Ш.4.30), (Ш.4.31) или (Ш.4.32).

Выражением (Ш.4.24) и системой алгебраических уравнений (Ш.4.29) представлено решение уравнения (Ш.4.6) в смешанной форме, удовлетворяющее, правда, всем граничным условиям. Можно поступить иначе, а именно, – получить явную форму общего решения уравнения (Ш.4.6), исключив числовые коэффициенты  $w_m(x_j)$  из выражения (Ш.4.12). Такая форма общего решения будет содержать только произвольные постоянные интегрирования, которые затем определяются из граничных условий. Рассмотрим это подробнее. Введем обозначение

$$\Psi_{j\beta_m}^*(x) = \Delta(x - x_j) \theta(x - x_j). \quad (\text{Ш.4.34})$$

Тогда формула (4.12) переписется в виде

$$w_m(x) = \sum_{k=1}^4 C_k z_{\beta_m k}(x) + {}^0 w_m^*(x) - \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m(x_j) \Psi_{j\beta_m}^*(x). \quad (\text{Ш.4.35})$$

Для исключения неизвестных коэффициентов  $w_m(x_j)$  из формулы (Ш.4.35), умножим (Ш.4.35) на величины  $\lambda_{2i} \beta_m^4$  и положим  $x = x_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, K_2$ . Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{K_2} (\delta_{ij} + A_{ij}) X_j = B_i^0 + B_i^*, \quad i = 1, 2, 3, \dots, K_2, \quad (\text{Ш.4.36})$$

где введены обозначения:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,

$$\begin{aligned} X_j &= \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m(x_j), \quad A_{ij} = \lambda_{2i} \beta_m^4 \Psi_{j\beta_m}^*(x_i), \\ B_j^0 &= \lambda_{2j} \beta_m^4 \sum_{k=1}^4 C_k z_{\beta_m k}(x_j), \quad B_j^* = \lambda_{2j} \beta_m^4 w_m^0(x_j). \end{aligned} \quad (\text{Ш.4.37})$$

В силу свойства функций  $\Psi_{j\beta_m}^*(x)$  будем иметь  $A_{ij} = 0$  для  $i \leq j$  и  $A_{ij} \neq 0$  для  $i > j$ . Таким образом, матрица системы (Ш.4.36) является треугольной. Определитель системы (Ш.4.36) легко вычисляется

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ A_{21} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{K_2 1} & A_{K_2 2} & A_{K_2 3} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (\text{Ш.4.38})$$

Неизвестные  $X_j$  представим в виде суммы

$$X_j = X_j^0 + X_j^*, \quad (\text{Ш.4.39})$$

где  $X_j^0$  соответствует удержанию в системе (Ш.4.36) в качестве свободных членов только  $B_i^0$ ,  $X_j^*$  – решение системы (Ш.4.36) при удержании только  $B_i^*$ .

Неизвестные  $X_j^0$  и  $X_j^*$  легко находятся по правилу Крамера

$$X_j^0 = (-1)^{j-1} \Delta_j^0, \quad X_j^* = (-1)^{j-1} \Delta_j^*, \quad (\text{Ш.4.40})$$

В котором определители  $\Delta_j^0$  образуются из определителя



$$\left| \begin{array}{ccccccc} B_1^0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ B_2^0 & A_{21} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ B_3^0 & A_{31} & A_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{K_2}^0 & A_{K_2 1} & A_{K_2 2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{K_2 K_2 - 1} \end{array} \right| \quad (\text{III.4.41})$$

как диагональные миноры, имеющие один и тот же общий элемент  $B_1^0$  в левом верхнем углу,

$$\Delta_1^0 = B_1^0, \Delta_2^0 = \left| \begin{array}{cc} B_1^0 & 1 \\ B_2^0 & A_{21} \end{array} \right|, \Delta_3^0 = \left| \begin{array}{ccc} B_1^0 & 1 & 0 \\ B_2^0 & A_{21} & 1 \\ B_3^0 & A_{31} & A_{32} \end{array} \right|, \dots \quad (\text{III.4.42})$$

Аналогично заменой  $B_j^0 \rightarrow B_j^*$  образуются определители  $\Delta_j^*$

$$\Delta_1^* = B_1^*, \Delta_2^* = \left| \begin{array}{cc} B_1^* & 1 \\ B_2^* & A_{21} \end{array} \right|, \Delta_3^* = \left| \begin{array}{ccc} B_1^* & 1 & 0 \\ B_2^* & A_{21} & 1 \\ B_3^* & A_{31} & A_{32} \end{array} \right|, \dots \quad (\text{III.4.43})$$

Учитывая обозначения (III.4.37) для  $B_j^0$  и свойства определителей, определители  $\Delta_j^0$  можно представить следующим образом

$$\Delta_j^0 = \sum_{k=1}^4 C_k \Delta_{jk}, \quad (\text{III.4.44})$$

где

$$\Delta_{jk} = \left| \begin{array}{cccccc} \lambda_{21} \beta_m^4 z_{\beta_{mk}}(x_1) & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \lambda_{22} \beta_m^4 z_{\beta_{mk}}(x_2) & A_{21} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{2j} \beta_m^4 z_{\beta_{mk}}(x_j) & A_{j1} & A_{j2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{jj-1} \end{array} \right|. \quad (\text{III.4.45})$$

Теперь решение (III.4.35) принимает вид

$$w_m(x) = \sum_{k=1}^4 C_k \left( z_{\beta_{mk}}(x) + \sum_{j=1}^{K_2} (-1)^j \Delta_{jk} \Psi_{j\beta_m}^*(x) \right) + w_m^*(x) + \sum_{j=1}^{K_2} (-1)^j \Delta_j^* \Psi_{j\beta_m}^*(x) \quad (\text{III.4.46})$$

и содержит только четыре произвольные константы  $C_k$ , которые определяются из граничных условий.

В заключение приведем формулы для моментов и напряжений в ребристой пластине. Изгибающие моменты и крутящий момент в обшивке вычисляются по формулам

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$H = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (\text{III.4.47})$$

основные напряжения в обшивке

$$\sigma_x = \frac{12M_1 z}{h^3}, \quad \sigma_y = \frac{12M_2 z}{h^3}, \quad \tau_{xy} = \frac{12Hz}{h^3} \quad \left( -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right), \quad (\text{III.4.48})$$

изгибающий момент в ребре, расположенном по линии  $x = x_j$ :

$$M_p^j = -E_{2j} J_{2j}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=x_j}, \quad (\text{III.4.49})$$

напряжения в ребре

$$\sigma_p^j = \frac{M_p^j \zeta}{J_{2j}^0}, \quad \zeta = z - d_j, \quad \frac{h}{2} \leq z \leq h_p^j + \frac{h}{2}, \quad (\text{III.4.50})$$

$$J_{2j}^0 = J_{2j} - d_j^2 F_{2j},$$

где  $h_p^j$ ,  $F_{2j}$  – высота и площадь поперечного сечения  $j$ -го ребра соответственно;  $d_j$  – расстояние от срединной плоскости обшивки до центра тяжести  $j$ -го

ребра.

При практическом использовании изложенной выше теории необходимо учитывать следующее очевидное обстоятельство. Если ребра расположены несимметрично относительно срединной поверхности пластины, например если они прикреплены к одной из поверхностей пластины (что обычно имеет место на практике), то результаты, относящиеся к ребрам, будут несколько искаженными. Это объясняется тем, что часть пластины, примыкающая к ребру, присоединена к нему, и, таким образом, она деформируется вместе с ним и, следовательно, действует как дополнение к ребру и увеличивает эффективную жесткость ребра. Таким образом, в этой части пластины в дополнение к изгибным напряжениям, аналогичным возникающим в остальных частях пластины, будут развиваться мембранные напряжения, соответствующие изгибу как части ребра. Данный вопрос был изучен Т. Карманом (см. [7, 8]). Эффективная ширина пластины, расположенной по обеим сторонам ребра, составляет примерно 18% от пролета [8]. Заметим, что при этом момент инерции ребра должен вычисляться относительно центра тяжести ребра.

Очевидно, если ребра расположены симметрично относительно срединной плоскости пластины, то, применяя обсуждаемую модель, получим верные результаты. Рассматриваемая модель ребристой пластины будет давать верные результаты и в случае, когда ребра жесткости не прикреплены к пластине, т. е. когда пластина просто свободно лежит на ребрах. Такой случай может представлять интерес для практики.

## ***5. Изгиб ребристой пластины с обшивкой ступенчато-переменной толщины***

Часто в конструкциях типа ребристых пластин собственно сама пластина-обшивка делается ступенчато-переменной толщины. Такая обшивка явля-

ется естественной в случае, когда на конструкцию действует, например, гидростатическое давление, увеличивающееся линейно в одном направлении.

Пусть прямоугольная пластина ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) нагружена поперечной нагрузкой  $q(x,y)$  и подкреплена рёбрами, расположенными параллельно оси  $y$  по линиям  $x = x_j = \text{const}$ ,  $j = 1, \dots, K_2$ . Будем учитывать только изгибные жесткости ребер, которые считаем постоянными. В промежутках между ребрами пластина-обшивка имеет постоянную, но разную на различных участках толщину (см. формулу (III.3.1), рис. III.3.1). Цилиндрическая жесткость такой пластины-обшивки вычисляется по формуле (III.3.3).

Опуская элементарные преобразования, приведем окончательно следующее разрешающее уравнение относительно функции прогиба  $w(x,y)$ :

$$\begin{aligned} \nabla^4 w + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{(D_{j+1} - D_j)}{D_j} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \delta(x - x_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta'(x - x_j) \right] + \frac{E_{2j} J_{2j}}{D_j} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - x_j) \right\} = \frac{q(x, y)}{D(x)}. \quad (\text{III.5.1}) \end{aligned}$$

Граничные условия могут быть любыми.

Решение этого уравнения будем строить по описанному выше алгоритму, используя идеи методов Стеклова-Фубини, Л. В. Канторовича и вариации произвольных постоянных. Не останавливаясь на подробностях, выпишем общее решение уравнения (III.5.1) в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) = w^*(x, y) - \sum_{j=1}^{K_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(D_{j+1} - D_j)}{D_j} \left[ R_{jn} \psi_{j\beta_n}^*(x) + M_{jn} \psi_{j\beta_n}^{*'}(x) \right] + \right. \\ \left. + \frac{E_{2j} J_{2j}}{D_j} \beta_n^4 W_{jn} \psi_{j\beta_n}^*(x) \right\} \sin(\beta_n y) + \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} Z_{\beta_n k}(x) \sin(\beta_n y). \quad (\text{III.5.2}) \end{aligned}$$

Здесь приняты такие обозначения

$$M_{jn} = w''_{nx}(x_j) - \nu\beta_n^2 w_{nx}(x_j), \quad W_{jn} = w_{nx}(x_j),$$

$$R_{jn} = w'''_{nx}(x_j) - (2 - \nu)\beta_n^2 w'_{nx}(x_j), \quad (\text{III.5.3})$$

$\{Z_{\beta_n k}(x)\}$  — фундаментальная система решений однородного обыкновенного уравнения  $\nabla_{\beta_n}^4 w_{nx}(x) = 0$ ; эту систему удобно выбрать в виде функций, обладающих единичной матрицей при  $x = 0$ , тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$w_{nx}(x) = w_{nx}(0)L_{\beta_n}(x) + w'_{nx}(0)M_{\beta_n}(x) + w''_{nx}(0)N_{\beta_n}(x) + w'''_{nx}(0)K_{\beta_n}(x), \quad (\text{III.5.4})$$

где произвольные постоянные

$$C_{1n} \equiv w_{nx}(0), \quad C_{2n} \equiv w'_{nx}(0), \quad C_{3n} \equiv w''_{nx}(0), \quad C_{4n} \equiv w'''_{nx}(0),$$

$$Z_{\beta_n 1} \equiv L_{\beta_n}(x) = \text{ch } \beta_n x - \frac{1}{2}\beta_n x \text{ sh }(\beta_n x), \quad Z_{\beta_n 3} \equiv N_{\beta_n}(x) = \frac{x \text{ sh}(\beta_n x)}{2\beta_n},$$

$$Z_{\beta_n 2} \equiv M_{\beta_n}(x) = \frac{1}{2\beta_n} [3 \text{ sh}(\beta_n x) - \beta_n x \text{ ch}(\beta_n x)],$$

$$Z_{\beta_n 4} \equiv K_{\beta_n}(x) = \frac{1}{2\beta_n^3} [\beta_n x \text{ ch}(\beta_n x) - \text{sh}(\beta_n x)], \quad (\text{III.5.5})$$

причем

$$\psi_{j\beta_n}^*(x) = K_{\beta_n}(x - x_j)\theta(x - x_j), \quad \psi_{j\beta_n}^{*'}(x) = K_{\beta_n}'(x - x_j)\theta(x - x_j). \quad (\text{III.5.6})$$

Частное решение  $w^*(x, y)$  уравнения удобно представить как

$$w^*(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nx}^*(x) \sin(\beta_n y), \quad w_{nx}^*(x) = \frac{2}{a} \int_0^a w^*(x, y) \sin(\beta_n y) dy, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}.$$

(III.5.7)

Функцию заданной нагрузки также представим рядом

$$\frac{q(x, y)}{D(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \sin(\beta_n y), \quad p_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{q(x, y)}{D(x)} \sin(\beta_n y) dy. \quad (\text{III.5.8})$$

Тогда

$$w_{nx}^*(x) = \int_0^x p_n(t) K_{\beta_n}(x-t) dt. \quad (\text{III.5.9})$$

Общее решение (III.5.2) содержит неизвестные числовые постоянные  $C_{kn}$ ,  $W_{jn}$ ,  $R_{jn}$ ,  $M_{jn}$ , которые определяются из граничных условий на кромках пластины (при  $x = 0$ ,  $x = a$ ) и условий на линиях расположения ребер жесткости. Принятая форма решения (III.5.2) автоматически удовлетворяет условиям шарнирного опирания по кромкам  $y = 0$ ,  $y = b$ .

Выпишем явно систему алгебраических уравнений для определения указанных констант в случае, когда кромки  $x = 0$ ,  $x = a$  — свободны

$$W_{jn} + \sum_{k=1}^{K_2} \left\{ \left[ \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} R_{kn} + \frac{E_{2k} J_{2k}}{D_k} W_{kn} \right] \psi_{k\beta_n}^*(x_j) + \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} M_{kn} \psi_{k\beta_n}^*(x_j) \right\} +$$

$$+ w_{nx}(0) L_{\beta_n}(x_j) + w'_{nx}(0) M_{\beta_n}(x_j) = w_{nx}^*(x_j), \quad (\text{III.5.10})$$

$$\frac{D_{j+1}}{D_j} R_{jn} + \sum_{k=1}^{K_2} \left\{ \left[ \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} R_{kn} + \frac{E_{2k} J_{2k}}{D_k} W_{kn} \right] [\psi_{k\beta_n}^{*(3)}(x_j) - (2-\nu)\beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^{*(1)}(x_j)] + \right.$$

$$\left. + \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} [\psi_{k\beta_n}^{*(4)}(x_j) - (2-\nu)\beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^{*(2)}(x_j)] M_{kn} \right\} +$$

$$+ w_{nx}(0) [L_{\beta_n}^{(3)}(x_j) - (2-\nu)\beta_n^2 L_{\beta_n}^{(1)}(x_j)] +$$

$$+ w'_{nx}(0) [M_{\beta_n}^{(3)}(x_j) - (2-\nu)\beta_n^2 M_{\beta_n}^{(1)}(x_j)] = \left[ w_{nx}^{*(3)}(x_j) - (2-\nu)\beta_n^2 w_{nx}'^*(x_j) \right],$$

$$(\text{III.5.11})$$

$$\frac{D_{j+1}}{D_j} M_{jn} + \sum_{k=1}^{K_2} \left\{ \left[ \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} R_{kn} + \frac{E_{2k} J_{2k}}{D_k} W_{kn} \right] [\psi_{k\beta_n}^{*(2)}(x_j) - \nu\beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^*(x_j)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left[ \psi_{k\beta_n}^{*(3)}(x_j) - \nu \beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^{*(1)}(x_j) \right] M_{kn} \Big\} + \\
& + w_{nx}(0) \left[ L_{\beta_n}^{(2)}(x_j) - \nu \beta_n^2 L_{\beta_n}(x_j) \right] + \\
& + w'_{nx}(0) \left[ M_{\beta_n}^{(2)}(x_j) - \nu \beta_n^2 M_{\beta_n}(x_j) \right] = \left[ w_{nx}^{*(2)}(x_j) - \nu \beta_n^2 w_{nx}^*(x_j) \right]. \quad (\text{III.5.12})
\end{aligned}$$

Кроме того, на свободных краях при  $x = a$  для каждого  $n$  будем иметь еще два уравнения

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{K_2} \left\{ \left[ \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} R_{kn} + \frac{E_{2k} J_{2k}}{D_k} W_{kn} \right] \left[ \psi_{k\beta_n}^{*(3)}(a) - (2 - \nu) \beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^{*(1)}(a) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left[ \psi_{k\beta_n}^{*(4)}(a) - (2 - \nu) \beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^{*(2)}(a) \right] M_{kn} \right\} + \\
& + w_{nx}(0) \left[ L_{\beta_n}^{(3)}(a) - (2 - \nu) \beta_n^2 L_{\beta_n}^{(1)}(a) \right] + \\
& + w'_{nx}(0) \left[ M_{\beta_n}^{(3)}(a) - (2 - \nu) \beta_n^2 M_{\beta_n}^{(1)}(a) \right] = \left[ w_{nx}^{*(3)}(a) - (2 - \nu) \beta_n^2 w_{nx}^{*(1)}(a) \right], \quad (\text{III.5.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{K_2} \left\{ \left[ \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} R_{kn} + \frac{E_{2k} J_{2k}}{D_k} W_{kn} \right] \left[ \psi_{k\beta_n}^{*(2)}(a) - \nu \beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^*(a) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{(D_{k+1} - D_k)}{D_k} \left[ \psi_{k\beta_n}^{*(3)}(a) - \nu \beta_n^2 \psi_{k\beta_n}^{*(1)}(a) \right] M_{kn} \right\} + \\
& + w_{nx}(0) \left[ L_{\beta_n}^{(2)}(a) - \nu \beta_n^2 L_{\beta_n}(a) \right] + \\
& + w'_{nx}(0) \left[ M_{\beta_n}^{(2)}(x_j) - \nu \beta_n^2 M_{\beta_n}(x_j) \right] = \left[ w_{nx}^{*(2)}(x_j) - \nu \beta_n^2 w_{nx}^*(x_j) \right]. \quad (\text{III.5.14})
\end{aligned}$$

Итак, решение задачи изгиба прямоугольной пластины, подкрепленной ребрами жесткости параллельно одной из сторон и имеющей ступенчато-переменную толщину, даётся формулами (III.5.2), в которых числовые коэффициенты определяются из системы (III.5.10)–(III.5.14).

## Литература

1. *Голоскоков Д. П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
2. *Голоскоков Д. П.* Практический курс математической физики в системе Maple: учебное пособие для вузов. – СПб.: ООО «ПаркКом», 2010. – 643 с.
3. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; под ред. Э. И. Григолюка. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
4. *Ершова В. В.* Импульсные функции, функции комплексной переменной. Операционное исчисление: учеб. пособие для инж специальностей высш. техн. учеб. заведений. – Минск, Вышэйша Школа, 1976. – 255 с.
5. *Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / пер. с англ.; под ред. Г. В. Корнеева. – М.: Физматгиз, 1963, – 412 с.
6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: «Наука», 1969. – 527 с.
7. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова Думка, 1988. – 736 с.
8. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М., Наука, 1979. – 560 с.
9. *Трикоми Ф. Дж.* Интегральные уравнения / пер. с англ. Б. В. Боярского, И. И. Данилюка; под ред. И. Н. Векуа. – М.: Изд-во иностр. лит-ры., 1960. – 300 с.
10. *Трикоми Ф. Дж.* Дифференциальные уравнения / пер. с англ. А. Д. Мышкиса. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 352 с.



## Содержание

В в е д е н и е ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА?.....	3
Г л а в а 1. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ.....	11
1. Игообразные функции .....	13
2. Поведение игообразных функций при $\lambda \rightarrow 0$ .....	15
3. Дельта-функция Дирака .....	16
4. Свойства $\delta$ -функции.....	18
5. Единичная функция Хэвисайда .....	22
6. Дифференцирование кусочно-непрерывных функций .....	24
7. Понятие о производных $\delta$ -функции .....	26
8. Интегралы, содержащие $\delta$ -функцию.....	29
9. Обобщенные функции. Функциональный подход .....	31
10. Некоторые применения $\delta$ -функции.....	35
11. Представление закона распределения внешней нагрузки с помощью обобщенных функций.....	39
12. Понятие об обобщенных решениях в математической физике.....	44
Г л а в а 2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ .....	52
1. О решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	52
2. Частично вырожденные уравнения .....	57

3. Общее решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с особенностями импульсного типа в правой части.....	60
4. Уравнение четвёртого порядка с постоянными коэффициентами и особенностями импульсного типа в правой части .....	64
5. Понятие о функции Грина.....	68
6. Функция Грина линейного дифференциального оператора .....	82
<b>Г л а в а 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В МЕХАНИКЕ ..</b>	<b>89</b>
1. Балка с промежуточными упругими опорами .....	89
2. Изгиб балки ступенчато-переменной жесткости .....	101
3. Изгиб прямоугольной пластины ступенчато-переменной толщины.....	105
4. Изгиб ребристых прямоугольных пластин.....	110
5. Изгиб ребристой пластины с обшивкой ступенчато-переменной толщины .....	123
Литература .....	128

Учебное издание

**Голоскоков** *Дмитрий Петрович*

**ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

*Учебное пособие*

Редактор Э.А. Горелик

Корректор